Développements limités

PTSI B Lycée Eiffel

22 avril 2013

La mathématique est une science dangereuse :
elle dévoile les supercheries et les erreurs de calcul.

Galilée

L'ordinateur peut faire plus de calculs que le cerveau
de l'homme car il n'a que ça à faire.

Perles du bac.

Introduction

Enfin du nouveau en analyse cette année. Les développements limités constituent un outil tellement fondamental pour les calculs de limites autres études locales de fonctions que vous ne pourrez plus vous en passer une fois que vous les aurez découverts ! L'idée est fort simple : approcher localement (c'est-à-dire au voisinage d'un réel donné) une fonction suffisamment régulière (c'est-à-dire dérivable un certain nombre de fois) par une fonction polynômiale. Des outils techniques essentiels, les différentes formules de Taylor, permettent d'effectuer cette approximation. Tout le chapître est de toute façon essentiellement technique puisque le but est avant tout de savoir calculer ces développements limités, ce qui nécessite l'ingurgitation d'un formulaire assez conséquent. Pour vous rassurer, nous verrons tout de même aussi dans ce dernier chapître d'analyse pure de l'année des applications recouvrant à peu près tous les domaines étudiés jusqu'ici.

Objectifs du chapitre :

- comprendre les différences entres les diverses versions de la formule de taylor, et en maîtriser les hypothèses.
- connaître par coeur les développements limités usuels.
- savoir repérer les situation où les développements limités peuvent être utiles, sans tomber dans l'excès de calculs dispensables.

1 Formules de Taylor

La première formule de Taylor que nous allons voir concerne les polynômes. Ici, pas question d'approximation, puisqu'un polynôme est évidemment simplement égal à lui-même, mais l'idée est de comprendre qu'il existe plusieurs façons différentes de décrire un même polynôme. L'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ étant de dimension $n+1$, on peut décrire un polynôme de degré n en donnant $n+1$ réels. On peut le faire d'au moins trois façons :

- donner les coefficients du polynôme. C'est la façon la plus classique de procéder, mais l'information donnée est finalement assez peu commode à exploiter autrement que très globalement (que signifie le fait qu'un polynôme de degré 8 a un coefficient de degré 3 égal à 5 ? Essentiellement rien).
- donner les valeurs du polynôme en $n+1$ réels distincts (cf la remarque sur les polynômes interpolateurs de Lagrange dans notre chapître sur la dimension des espaces vectoriels). Cela donne une information très concrète mais éparpillée à $n+1$ endroits différents.
- la troisième méthode que nous allons voir concentre réellement toute l'information au même endroit, puisque la formule de Taylor reconstitue le polynôme à partir des valeurs de ses différentes dérivées en un même réel a.

Théorème 1. Formule de Taylor pour les polynômes.
Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $a \in \mathbb{R}$, alors $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{P^(k)(a)}{k!}(X-a)^k$.

Démonstration. Commençons par prouver la formule dans le cas particulier où $P(X) = P_i(X) = X^i$. Dans ce cas, les dérivées du polynôme sont données par $P'(X) = iX^{i-1}$, $P''(X) = i(i-1)X^{i-2}$, ..., $P^{(k)}(X) = i(i-1)\dots(i-k+1)X^{i-k} = \dfrac{i!}{(i-k)!}X^{i-k}$ (une récurrence est nécessaire pour prouver ce résultat tout à fait rigoureusement, on s'en passera). On en déduit que $P^{(k)}(a) = \dfrac{i!}{(i-k)!}a^{i-k}$, puis que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{P^(k)(a)}{k!}(X-a)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{i!}{(i-k)!k!}a^{i-k}(X-a)^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{i}{k}(X-a)^k a^{i-k} = (X-a+a)^i = X^i$ en reconnaissant la formule du binôme de Newton. Certains termes de la somme ne sont pas définis (quand $k > i$), ce qui ne pose pas de problème en considérant qu'ils sont nuls par convention. Pour prouver la formule pour un polynôme quelconque, on procède ensuite par linéarité : $P = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i P_i$ (où les a_i sont les coefficients de P), donc $P(X) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i P_i(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i \sum_{k=0}^{n} \frac{P_i^(k)(a)}{k!}(X-a)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}(X-a)^k \sum_{i=0}^{n} a_i P_i^{(k)}(a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}(X-a)^k P^{(k)}(a)$ par linéarité des dérivées k-èmes. □

Une fois cette première formule de Taylor démontrée, on va tenter de l'appliquer telle quelle à des fonctions qui ne sont plus des polynômes. Le résultat ne sera bien sûr plus une égalité, et toute la difficulté sera d'arriver à comprendre ce que vaut le reste une fois la partie polynômiale isolée. C'est l'objet des trois autres formules de Taylor que nous allons maintenant aborder.

Théorème 2. Formule de Taylor avec reste intégral.
Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un intervalle I et $a \in I$, alors $\forall x \in I$,
$f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(-t)^n}{n!} f^{(n+1)(t)}\ dt$.

Démonstration. Pour comprendre (et même simplement retenir) cette formule, écrivons-là pour $n = 0$: $f(x) = f(a) + \displaystyle\int_a^x f'(t)\ dt$. En effet, cette égalité est pratiquement évidente puisque l'intégrale vaut $f(x)-f(a)$. Comment faire maintenant pour transformer le f' en f'' dans l'intégrale et obtenir la formule au rang suivant ? Tout simplement en faisant une IPP. On pose $u(t)=f'(t)$, soit $u'(t)=f''(t)$, et $v'(t)=1$. La seule subtilité consiste à choisir $v(t)=t-x$, qui est bien une primitive de v', et on trouve exactement la formule au rang 1. Plus généralement, la formule se prouve par récurrence. L'initialisation a déjà été prouvée, pour l'hérédité, on va faire une IPP en posant $u(t)=f^{(n+1)}(t)$, donc $u'(t)=f^{(n+2)}(t)$; et $v'(t)=\dfrac{(x-t)^n}{n!}$, soit $v(t)=-\dfrac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}$. On trouve alors $f(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+\left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)(t)}\right]_a^x+\int_a^x\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+2)}(t)\,dt$. Le crochet valant $\dfrac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a)$, on trouve bien la formule au rang $n+1$. □

Définition 1. Le polynôme $P(X)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k$ est le **polynôme de Taylor d'ordre n de f en a**, noté $T_n(X)$. La différence $f(x)-T(x)=\displaystyle\int_a^x\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,dt$ est le **reste intégral d'ordre n de f en a**, noté $R_n(x)$.

Théorème 3. Formule de Taylor-Lagrange.
Sous les mêmes hypothèses que pour la formule de Taylor avec reste intégral, on a la majoration $|R_n(x)|\leqslant\dfrac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}M_{n+1}$, où $M_{n+1}=\sup\limits_{t\in I}|f^{n+1}(t)|$.

Démonstration. Il suffit de majorer le reste intégral obtenu dans le précédent théorème. On majore $|f^{n+1}(t)|$ par M_{n+1}, et il reste à calculer $\displaystyle\int_a^x\frac{(x-t)^n}{n!}\,dt=\left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\right]_a^x=\frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$. □

Théorème 4. Formule de Tayolor-Young.
Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et $a\in I$, alors $f(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+o(x-a)^n$.

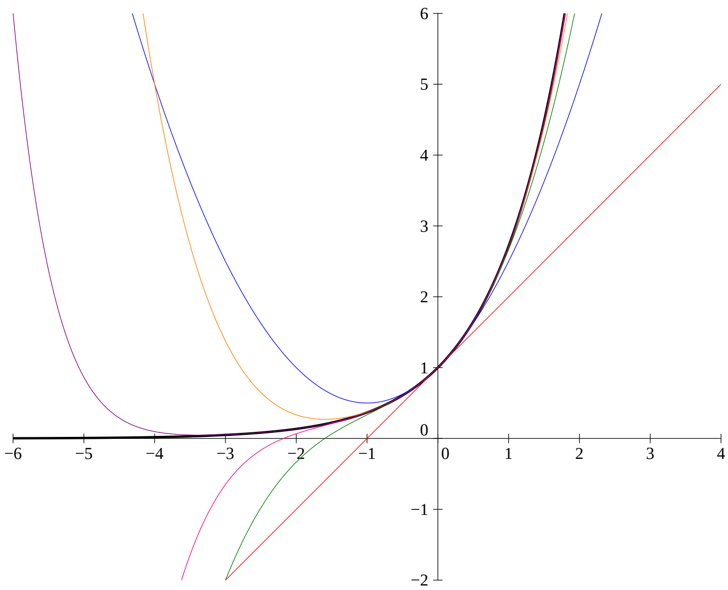
Démonstration. Le résultat découle immédiatement de la formule de Taylor-Lagrange dans le cas où la fonction est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, mais malheureusement, on ne l'a supposée que $\mathcal{C}^n$. Pas grave, appliquons donc Taylor avec reste intégral à l'ordre précédent : $R_{n-1}(x)=\displaystyle\int_a^x\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(t)\,dt=\int_a^x\frac{(x-t)^{n-1}(t)}{(n-1)!}f^{(n)}(a)\,dt+\int_a^x\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}(f^{(n)}(t)-f^{(n)}(a))\,dt$. La première intégrale vaut exactement $\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$, soit le dernier terme du polynôme de Taylor d'ordre n. Ne reste plus qu'à prouver que la deuxième intégrale (on la notera J) est un $o(x-a)^n$. Or, la fonction étant de classe $\mathcal{C}^n$, en fixant une valeur de $\varepsilon>0$, il existe un voisinage de a sur lequel $|f^{(n)}(t)-f^{(n)}(a)|\leqslant\varepsilon$. Sur ce voisinage, on aura $|J|\leqslant\varepsilon\dfrac{(x-a)^n}{n!}$. Le $n!$ étant constant (seul x varie ici) et ε pouvant être choisi arbitrairement petit, on retrouve exactement $J=o(x-a)^n$. □

Remarque 1. Les trois formules de Taylor ue nous venons de voir (celle sur les polynômes est un peu à part) se resssemblent, mais ont chacune leur spécificité qui les rend toutes indispensables dans certaines situations :

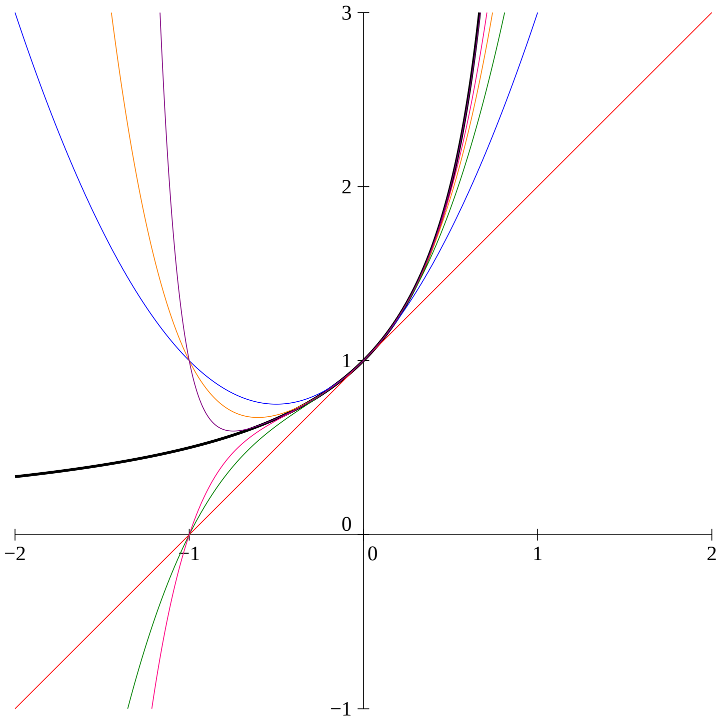
- la formule de Taylor-Young est de loin celle que vous utiliserez le plus souvent, c'est la moins précise mais c'est elle qui va nous permettre d'obtenir les développements limités. Elle met vraiment l'accent sur le caractère local des formules de Taylor.
- au contraire, l'inégalité de Taylor-Lagrange est la seule permettant d'obtenir des informations globalement, c'est-à-dire sur tout l'intervalle I. Elle sera notamment utilisée pour prouver des convergences de suites sur tout l'intervalle I.

- la formule de Taylor avec reste intégral est la plus fondamentale dans la mesure où c'est la seule à donner une version exacte du reste. À partir de là, tous les calculs restent possibles, et on s'en servira parfois pour obtenir des majorations du reste plus fines ou différentes de celle donnée par Taylor-Lagrange.

Exemple 1 : Appliquons la formule de Taylor-Young à la fonction exponentielle, pour $a = 0$, à l'ordre n. Les dérivées sont évidemment vite calculées puisqu'elles sont toutes identiques, et valent 1 en 0. On en déduit que $e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$. Graphiquement, les polynômes $T_0(X) = 1$, $T_1(X) = 1 + X$, $T_2(X) = 1 + X + \frac{1}{2}X^2$ etc, sont les polynômes dont les courbes sont les plus proches possibles de la courbe de l'exeponentielle en 0 pour chaque degré. En pratique, ces courbes vont « coller » à celle de l'exponentielle de plus en plus longtemps au voisinage de 0. On peut prouver la convergence de $T_n(x)$ vers e^x quelle que soit la valeur de x, mais ce n'est pas notre but cette année (et ça ne découle en tout cas pas du tout de la formule de taylor-Young). Une petite illustration avec les premiers polynômes de Taylor (T_1 en rouge, T_2 en bleu, T_3 en vert, T_4 en orange, T_5 en rose, T_{10} en violet, la courbe de l'exponentielle étant en noir) :



Exemple 2 : Effectuons les mêmes calculs sur la fonction $g : x \mapsto \frac{1}{1-x}$. On calcule $g'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ (le $-$ de la dérivée du dénominateur compense le $-$ de la dérivation de l'inverse), $g''(x) = \frac{2}{(1-x)^3}$, et on conjecture (et on prouve par récurrence) que $g^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$. En particulier, $g^{(n)}(0) = n!$, et la formule de Taylor-Young donne alors $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$. Ce n'est pas une grande surprise, on sait depuis qu'on a appris à étudier des suites géométriques que $\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x} + O(x^{n+1})$. Ici, bien évidemment, la suite $T_n(x)$ ne peut pas converger vers $\frac{1}{1-x}$ pour toute valeur de x puisqu'on aura déjà de gros problèmes quand $x = 1$. En fait, la formule de la somme géométrique permet de prouver facilement que la convergence n'a lieu que si $x \in]-1, 1[$. Une illustration graphique, avec les mêmes codes couleurs que pour l'exponentielle :



2 Développements limités

2.1 Définitions

Définition 2. Une fonction f admet un **développement limité à l'ordre** n **en** a si $f(x) \underset{x \to a}{=} P(x-a) + o(x-a)^n$, où $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Le polynôme P est alors appelé **partie régulière** du développement limité, et ce qui se cache derrière le $o(x-a)^n$ est le **reste** du développement limité. On notera souvent $DL_n(a)$ pour désigner un développement limité à l'ordre n en a.

Remarque 2. On omettra souvent de préciser que x tend vers 0 quand on écrit un développement limité en 0, ce qui sera de loin le cas le plus fréquent.

Proposition 1. Si f admet un $DL_n(a)$, sa partie régulière est unique.

Démonstration. En effet, si f admettait deux développements limités avec des parties régulières P_1 et P_2 distinctes, on aurait par soustraction des deux développements $0 = P_1(x-a) - P_2(x-a) + o(x-a)^n$, autrement dit $P_1(x-a) - P_2(x-a) = o(x-a)^n$. Le polynôme $P_1 - P_2$ étant de degré au plus n, ce ci n'est possible que s'il est nul. □

Corollaire 1. Si f est une fonction paire, son $DL_n(0)$ ne contient que despuissances paires de x. De même, si f est impaire, son $DL_n(0)$ ne contiendra que des puissances impaires de x.

Démonstration. Soit $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n)$ le $DL_n(0)$ de f (dans le cas d'une fonction paire. Comme $-x$ tend certainement vers 0 quand x tend vers 0, on peut écrire $f(-x) = a_0 - a_1 x + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$. En soustrayant les deux égalités et en utilisant le fait que $d(x) - f(-x) = 0$ pour une fonction paire, on trouve $0 = 2a_1 x + \cdots + 2a_{2k+1} x^{2k+1} + o(x^n)$. Or, la fonction nulle a évidemment pour développement limité en 0 le développement suivant : $0 = 0 + o(x^n)$. Par unicité du DL, on en déduit que $a_1 = \cdots = a_{2k+1} = 0$. Le raisonnement pour une fonction impaire est le même en faisant une somme au lieu de la différence. □

Proposition 2. Si f admet un $DL_n(a)$, alors f admet des $DL_k(a)$ pour tout entier $k \leqslant n$, obtenus par **troncature** du $DL_n(a)$, c'est-à-dire en gardant dans la partie régulière du $DL_n(a)$ les termes jusqu'à $a_k(X-a)^k$.

Démonstration. C'est évident, tous les termes suivants sont des $o(X-a)^k$, donc peuvent être intégrés dans un $o(X-a)^k$ global, ce qui donne bien un $DL_k(a)$ de f. □

Remarque 3. Attention tout de même à ne pas se dire simplement qu'on garde dans la partie régulière les termes de degré inférieur ou égal à k, ce n'est pas vrai si on travaille sur des développements limités ailleurs qu'en 0.

Proposition 3. Une fonction f admet un DL_0 en a si et seulement si elle est continue en a.
Une fonction f admet un DL_1 en a si et seulement si elle est dérivable en a.
Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ en a, alors f admet un DL_n en a, de partie régulière $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$.

Démonstration. Tout a déjà été fait ! Dire que f est continue en a signifie bien que $f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + o(1)$, dire que f est dérivable en a est équivalent à avoir $f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a)$, et le troisième point est une conséquence immédiate de la formule de Taylor-Young. Attention tout de même, dans ce dernier cas, la réciproque n'est pas du tout vraie, il existe des fonctions qui admettent par exemple des DL à tout ordre en 0 sans être de classe $\mathcal{C}^\infty$. □

2.2 Formulaire, première partie

Théorème 5. Toutes les fonctions usuelles suivantes admettent des DL à tout ordre en 0, donnés par les formules suivantes :

- $e^x = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \dots + \frac{1}{n!}x^n + o(x^n)$
- $\displaystyle\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n) = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + o(x^n)$
- $\displaystyle\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n) = 1 - x + x^2 + \dots + (-1)^n x^n + o(x^n)$
- $\ln(1+x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1}\frac{x^k}{k} + o(x^n) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \dots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$
- $\mathrm{ch}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \dots + \frac{1}{(2n)!}x^{2n} + o(x^{2n+1})$
- $\mathrm{sh}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}) = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \dots + \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} + o(x^{2n+2})$
- $\cos(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + o(x^{2n+1})$
- $\sin(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + o(x^{2n+2})$
- $(1+x)^\alpha = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}x^k + o(x^n) = 1 + \frac{\alpha}{2}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{6}x^2 + \dots$
  $\displaystyle+\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$ (α désignant ici un réel quelconque).

Démonstration. Toutes ces formules découlent immédiatement de la formule de Taylor-Young, mais on peut éviter certains calculs. Les deux premières formules ont déjà été prouvées dans la première partie du cours. La troisième est obtenue à partir de la deuxième en remplaçant simplement x par $-x$. Pour $\ln(1+x)$, pas vraiment d'autre choix pour nous que de reprendre la formule de Taylor, même si les calculs seront en fait très rapides : en posant $f(x) = \ln(1+x)$, on a $f'(x) = \dfrac{1}{1+x}$. Comme le

DL de $\frac{1}{1+x}$ assure que $\left(\frac{1}{1+x}\right)^{(n)}(0) = (-1)^n n!$, on en déduit que $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!$, et comme $f(0) = 0$, on trouve bien $f(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{k!} x^k + o(x^n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}x^k}{k} + o(x^n)$.
Le DL de la fonction ch découle immédiatement du fait que $\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, ou si on préfère du fait que les dérivées de ch sont périodiquement sh qui s'annule en 0 et ch qui vaut 1 en 0. Ensuite, $\mathrm{sh}(x) = e^x - \mathrm{ch}(x)$ donne immédiatement le DL de sh. Pour les fonctions trigonométriques, on peut utiliser les dérivées (on a cette fois-ci une périocité 4 sur les dérivées, qui s'annulent une fois sur deux et valent alternativement 1 et -1 le reste du temps) ou pour faire plus savant utiliser le fait que $\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$. Bon, bien sûr, cela suppose qu'on sache faire des développements limités de fonctions complexes, mais ça ne pose en fait aucun problème. La dernière formule nécessite vraiment de revenir à la formule de Taylor mais n'est pas difficile à obtenir. Si on pose $f(x) = (1+x)^\alpha$, alors $f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$, $f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$ etc. On fait une récurrence si on tient à être très rigoureux. □

Exemple : Si la dernière formule donne parfois des calculs peu digestes, il est indispensable de connaître par coeur les premiers termes du développement limité de $x \mapsto \sqrt{1+x}$ (qui correspond à $\alpha = \frac{1}{2}$) : $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + o(x^4)$.

2.3 Opérations sur les développements limités

Proposition 4. Si f et g admettent des $DL_n(a)$, alors $f+g$ admet un $DL_n(a)$ dont la partie principale est la somme de celles de f et de g.

Démonstration. C'est complètement évident, la somme de deux $o(x-a)^n$ étant bien sûr un $o(x-a)^n$. □

Exemple : Le DL_5 de la fonction $x \mapsto e^x + \cos(x)$ en 0 est $e^x + \cos(x) = 2 + x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^5)$.

Proposition 5. Si f et g admettent des $DL_n(a)$, alors fg admet un $DL_n(a)$ dont la partie principale est la troncature du produit de celles de f et de g.

Démonstration. Là encore, c'est à peu près évident : si $f(x) = P(x-a) + o(x-a)^n$ et $g(x) = Q(x-a) + o(x-a)^n$, alors $f(x)g(x) = P(x-a)Q(x-a) + o(x-a)^n$, les différents termes du produit à part PQ faisant tous apparaitre des $o(x-a)^n$. Si on fait passer dans le o ce qui est un $o(x-a)^n$ dans le produit PQ, on trouve le résultat souhaité. □

Exemple : En pratique, on se contente de développer le produit des polynômes en omettant d'écrire les termes de degré supérieur à l'ordre recherché pour le DL. Ainsi, le DL_5 en 0 de la fonction $x \mapsto e^x \cos(x)$ est $e^x \cos(x) = \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5\right)\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4\right) + o(x^5) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{12}x^5 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{24}x^5 + o(x^5) = 1 + x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{30}x^5 + o(x^5)$.

Remarque 4. Pas de propriété très rigoureuse à énoncer dans le cas d'une composée de deux fonctions, mais en pratique, on sait calculer le $DL_n(a)$ de $g \circ f(x)$ en $f(a)$ en remplaçant dans le $DL_n(g)$ en $f(a)$, la valeur de x par celle de $f(x)$. Attention tout de même, comme on travaillera essentiellement avec des DL en 0, à ne pas composer par une fonction qui n'a pas une limite nulle quand x tend vers 0 !

Exemple : En pratique, on ne se gênera pas pour faire des abus de notations en écrivant des o à l'intérieur de fonctions. On ne change pas une équipe qui gagne, cherchons donc le $DL_5(0)$ de $x \mapsto e^{\cos(x)}$. On commence par écrire $e^{\cos(x)} = e^{1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+o(x^5)} = e \times e^{-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+o(x^5)}$. Maintenant que ce qui est dans la deuxième exponentielle tend vers 0 (notons-le u), on peut lui appliquer le DL de l'exponentielle, pour obtenir $e^{\cos(x)} = e\left(1+u+\frac{1}{2}u^2\right)+o(x^5)$ (inutile d'aller plus loin pour obtenir un DL_5 à la fin, puisque $u \sim -\frac{1}{2}x^2$, donc u^3 sera déjà inclus dans un $o(x^5)$. On peut expliciter : $e^{\cos(x)} = e\left(1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+\frac{1}{8}x^4\right)+o(x^5) = e-\frac{e}{2}x^2+\frac{e}{6}x^4+o(x^5)$ en se débarassant bien sûr de tous les termes d'ordre plus grand que 5.

Remarque 5. Dans le cas de quotients, on essaiera toujours de les écrire sous la forme $\frac{u(x)}{1+v(x)}$, avec v de limite nulle, ce qui permet de composer v par $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ dont on connait le DL, puis d'effectuer un produit de DL.

Exemple : Calculons donc, pour boucler la boucle, un $DL_5(0)$ de $x \mapsto \frac{e^x}{\cos(x)}$. On commence par écrire $\frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+o(x^5)}$. En notant $u = -\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4$, on applique le DL de $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ pour trouver $\frac{1}{\cos(x)} = 1-u+u^2+o(x^5) = 1+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{24x^4}+\frac{1}{4}x^4+o(x^5) = 1+\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{24}x^4+o(x^5)$. Il ne reste plus qu'à faire le produit par l'exponentielle : $\frac{e^x}{\cos(x)} = \left(1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4+\frac{1}{120}x^5+o(x^5)\right)\left(1+\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{24}x^4+o(x^5)\right) = 1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4+\frac{1}{120}x^5+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{12}x^5+\frac{5}{24}x^4+\frac{5}{24}x^5+o(x^5) = 1+x+x^2+\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^4+\frac{3}{10}x^5+o(x^5)$.

Proposition 6. Si f admet un $DL_n(a)$ et F est une primitive de f, alors F admet un $DL_{n+1}(a)$, dont la partie principale est la primitive de la partie principale de f prenant pour valeur $F(a)$ en a.

Démonstration. Nous admettrons ce résultat un peu technique. La difficulté consiste à prouver que quand on dérive un $o(x-a)^{n+1}$, on obtient toujours un $o(x-a)^n$, ce qui nécessite le théorème des accroissements finis. □

Proposition 7. Soit f une fonction admettant un $DL_n(a)$, et telle que sa dérivée f' admette un $DL_{n-1}(a)$, alors la partie principale du $DL_{n-1}(a)$ de f' est la dérivée de celle du $DL_n(a)$.

Démonstration. Résultat également admis. Attention aux hypothèses, il se peut très bien hélas que f admette un DL_n sans que f' admette un DL_{n-1}. □

Exemple : Pour terminer ce paragraphe sur les différentes techniques à maîtriser pour les calculs de développements limités, nous allons calculer de trois façons différentes le $DL_5(0)$ de la fonction tangente.

Exemple : Trois méthodes différentes pour calculer le $DL_5(0)$ de la fonction tangente.

- Première possibilité, faire le DL du quotient $\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$. On a déjà vu plus haut que $\frac{1}{\cos(x)} = 1+\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{24}x^4+o(x^5)$, il ne reste plus quà faire le produit : $\tan(x) = \left(x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5\right) \times \left(1+\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{24}x^4\right)+o(x^5) = x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5+\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{12}x^5+\frac{5}{24}x^5+o(x^5) = x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+o(x^5)$.

- Deuxième possibilité : partir de $\tan'(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$, et intégrer un DL_4. On part de $\dfrac{1}{\cos^2(x)} = \left(1 + \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{5}{24}x^4\right)^2 + o(x^4) = 1 + \dfrac{1}{4}x^4 + x^2 + \dfrac{5}{12}x^4 + o(x^4) = 1 + x^2 + \dfrac{2}{3}x^4 + o(x^4)$. Comme $\tan(0) = 0$, l'intégration donne $\tan(x) = x + \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{2}{15}x^5 + o(x^5)$.
- Troisième possibilité : exploiter la relation $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$. On sait que la fonction tangente est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et impaire, elle admet donc un $DL_5(0)$ de la forme $\tan(x) = ax + bx^3 + cx^5 + o(x^6)$. On en déduit d'une part que $\tan'(x) = a + 3bx^2 + 5cx^4 + o(x^5)$, et d'autre part que $1 + \tan^2(x) = 1 + a^2x^2 + 2abx^4 + o(x^5)$. Par identification de ces deux DL, on trouve les relations $a = 1$, puis $3b = a^2 = 1$, donc $b = \dfrac{1}{3}$, et enfin $5c = 2ab = \dfrac{2}{3}$, soit $c = \dfrac{2}{15}$. Bien sûr, les trois méthodes donnent le même développement.

2.4 Formulaire, deuxième partie

Théorème 6. Toutes les fonctions usuelles suivantes admettent des DL à tout ordre en 0, donnés par les formules suivantes :

- $\tan(x) = x + \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{2}{15}x^5 + o(x^6)$
- $\mathrm{th}(x) = x - \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{2}{15}x^5 + o(x^6)$
- $\arctan(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2k+2}) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots + \frac{(-1)^k}{2k+1}x^{2k+1} + o(x^{2k+2})$
- $\mathrm{Argth}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2k+2}) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots + \frac{1}{2k+1}x^{2k+1} + o(x^{2k+2})$
- $\arcsin(x) = x + \dfrac{1}{2}\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{1 \times 3}{2 \times 5}\dfrac{x^5}{5} + \cdots + \dfrac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \cdots \times (2n)}\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$
  $= x + \dfrac{1}{6}x^3 + \dfrac{3}{40}x^5 + o(x^6)$
- $\arccos(x) = \dfrac{\pi}{2} - \arcsin(x) = \dfrac{\pi}{2} - x - \dfrac{1}{6}x^3 - \dfrac{3}{40}x^5 + o(x^6)$
- $\mathrm{Argsh}(x) = x - \dfrac{1}{2}\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{1 \times 3}{2 \times 5}\dfrac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \dfrac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \cdots \times (2n)}\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$
  $= x - \dfrac{1}{6}x^3 + \dfrac{3}{40}x^5 + o(x^6)$

Démonstration. Je crois qu'on n'a pas besoin de plus de démonstration pour la tangente. La tangente hyperbolique s'obtient par les mêmes méthodes, seuls certains signes changent, ça vous fera un bon exercice. Toutes les autres fonctions s'obtiennent en intégrant. On sait que $\arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n+1})$, ce qui donne par intégration la formule annoncée en tenant compte du fait que $\arctan(0) = 0$. Idem pour Argth avec des signes positifs partout. Pour arcsin un peu plus compliqué : $\arcsin'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2n} + o(x^{2n+1})}$, et il n'est pas évident de trouver une formule simple pour ce développement. Contentons-nous de le faire à l'ordre 4 : $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \dfrac{1}{2}(x^2+x^4) - \dfrac{1}{8}(x^2+x^4)^2 + o(x^5) = 1 + \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{2}x^4 - \dfrac{1}{8}x^4 + o(x^5) = 1 + \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{3}{8}x^4 + o(x^4)$, qui donne bien la formule annoncée en intégrant. Comme $\arccos(x) = \dfrac{\pi}{2} - \arcsin(x)$, aucun calcul nécessaire pour celui-ci. Enfin, Argsh est très similaire à arcsin, les signes négatifs en moins. Il n'y a évidemment pas Argch dans la liste car la fonction n'est tout simplement pas définie en 0 (et en 1, elle admet une tangente verticale, donc pas de DL non plus). $\square$

3 Applications

Pas de proposition ni de théorème dans cette dernière partie de chapître, le but est simplement de faire une petite liste des calculs les plus classiques pour lesquels un recours à des développements limités pourra vous permettre d'aller beaucoup plus loin (ou plus vite) que ce que vous ne faisiez avant. Les techniques utilisées doivent tout de même être parfaitement connues.

3.1 Calculs de limites

Exemple : Calcul de $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{x^2}$.

Voici un exemple typique de calcul de limite nécessitant les DL. On commence bien sûr par passer à l'exponentielle : $f(x) = e^{x^2\ln(x\sin(\frac{1}{x}))}$ (en notant f la fonction dont on cherche la limite). On sait que $\sin\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$, donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 1$. Cela assure que la fonction f est bien définie au voisinage de $+\infty$, mais ne permet pas de calculer la limite puisqu'il reste dans l'exponentielle une belle forme indéterminée. Tentons alors de faire un DL de tout ça : $\sin\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{=} \frac{1}{x} - \frac{1}{6x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$, donc $x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 1 - \frac{1}{6x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$. On peut désormais repasser simplement aux équivalents : $\ln\left(x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) \sim -\frac{1}{6x^2}$ (puisque celle quantité tend vers 0), et $x^2\ln\left(x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) \sim -\frac{1}{6}$. Autrement dit, on obtient la conclusion suivante : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = e^{-\frac{1}{6}}$. Il va de soi qu'obtenir une telle valeur par une autre méthode serait bien compliqué.

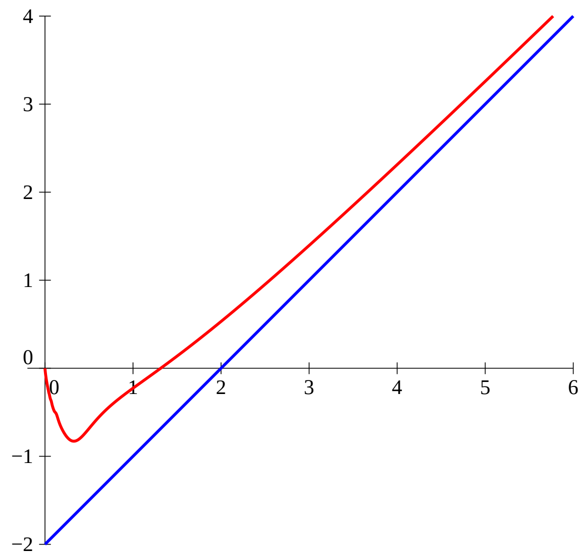
3.2 Étude locale de fonctions

Exemple : Étude de $f : x \mapsto \dfrac{x^2}{x+1}e^{\sin(\frac{1}{x})} - 2x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ au voisinage de $+\infty$.

L'étude locale d'une fonction consiste à déterminer pour cette fonction l'existence d'une tangente (si on est au voisinage d'une valeur finie) ou d'une asymptote, et de donner la position relative de la droite et de la courbe dans le voisinage considéré. Tous ces calculs sont très souvents faisables sans recours aux développements limités, mais les DL présentent le grand avantage de pouvoir tout faire en un seul calcul. Ainsi, pour l'étude d'une fonction au voisinage de 0, un DL à l'ordre 2 donnera l'équation de la tangente et la position relative via le signe du terme d'ordre 2 (éventuellement d'ordre 3 si celui d'ordre 2 s'annule).

En $+\infty$, une difficulté s'ajoute, il faut se ramener en 0 pour pouvoir utiliser des DL et donc effectuer en général le changement de variable $X = \frac{1}{x}$. Ici, $f(x) = \dfrac{1}{X(X+1)}e^{\sin(X)} - \dfrac{2}{X}\ln(1+X)$. Pour avoir des fonctions définies en 0 et pouvoir effectuer un DL, on multiplie tout par X : $Xf(x) = \dfrac{e^{\sin(X)}}{1+X} - 2\ln(1+X) = (e^{X-\frac{1}{6}X^3+o(X^4)})(1-X+X^2-X^3+o(X^3)) - 2\left(X - \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{3}X^3 + o(X^3)\right) = \left(1 + X - \frac{1}{6}X^3 + \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{6}X^3 + o(X^3)\right)(1 - X + X^2 - X^3 + o(X^3)) - 2X + X^2 - \frac{2}{3}X^3 + o(X^3) = 1 - X + X^2 - X^3 + X - X^2 + X^3 + \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}X^3 - 2X + X^2 - \frac{2}{3}X^3 + o(X^3) = 1 - 2X + \frac{3}{2}X^2 - \frac{7}{6}X^3 + o(X^3)$.

Il se trouve que le terme d'ordre 3 est ici inutile, mais mieux vaut être prudent en général. En tout cas, $f(x) = \frac{1}{X} - 2 + \frac{3}{2}X + o(X) = x - 2 + \frac{3}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$. Cette égalité prouve que la droite d'équation $y = x - 2$ est asymptote oblique à la courbe représentative de f en $+\infty$, et comme de plus $f(x) - (x-2) \sim \frac{3}{2x}$, qui est positif au voisinage de $+\infty$, la courbe sera située au-dessus de son asymptote (dans un voisinage de $+\infty$ qui reste évidemment indéterminé ! C'est imprécis, mais on serait bien incapable d'étudier plus précisément la fonction f dans ce cas).



3.3 Développements asymptotiques de suites

Exemple : Développement asymptotique d'une suite implicite.
Pour tout entier naturel n, on définit le réel u_n comme étant l'unique solution positive de l'équation $x^4 + x^3 = n$. Cette équation admet effectivement une solution unique puisque la fonction $g : x \mapsto x^4 + x^3$, qui est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, effectue une bijection de $[0, +\infty[$ sur lui-même. Déterminer un développement asymptotique de la suite consiste à en trouver un équivalent, puis un équivalent de la différence entre u_n et son équivalent, et ainsi de suite, pour obtenir une valeur approchée de u_n comme somme de termes d'ordres de grandeur décroissants. Ce n'est pas un développement limité à proprement parler car ces termes ce seront pas nécessairement des puissances successives entières de la variable comme dans le cas d'un DL.
Dans notre cas, on peut commencer par remarquer que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$. En effet, en notant g^{-1} la réciproque de g sur $[0, +\infty[$, $u_n = g^{-1}(n)$, et d'après le théorème de la bijection, $\lim\limits_{n \to +\infty} g^{-1}(n) = +\infty$. En découle que $u_n^3 = o(u_n^4)$, ou encore que $u_n^4 + u_n^3 \sim u_n^4$. Comme par définition $u_n^4 + u_n^3 + n$, on en déduit que $u_n^4 \sim n$, soit $u_n \sim n^{\frac{1}{4}}$. Pour obtenir cet équivalent, on a en fait utilisé que $u_n^4 = \dfrac{n}{1 + \frac{1}{u_n}} = \dfrac{n}{1 + o(1)}$. On dispose maintenant d'une information supplémentaire, qui nous permet de refaire le calcul à un ordre plus précis (n'oubliez pas pour le calcul que $\dfrac{1}{u_n}$ tend vers 0, ce qui permet d'utiliser les DL classiques du cours) : $u_n^4 = \dfrac{n}{1 + \frac{1}{u_n}} = \dfrac{n}{1 + n^{-\frac{1}{4}} + o(n^{-\frac{1}{4}})} = n(1 - n^{-\frac{1}{4}} + o(n^{-\frac{1}{4}})) = n - n^{\frac{3}{4}} + o(n^{\frac{3}{4}})$. Il ne reste plus qu'à passer tout ça à la puissance $\dfrac{1}{4}$: $u_n = (n - n^{\frac{3}{4}} + o(n^{\frac{3}{4}}))^{\frac{1}{4}} = n^{\frac{1}{4}} \times (1 - n^{-\frac{1}{4}} + o(n^{-\frac{1}{4}}))^{\frac{1}{4}} = n^{\frac{1}{4}} \left(1 - \dfrac{1}{4} n^{-\frac{1}{4}} + o(n^{-\frac{1}{4}})\right) = n^{\frac{1}{4}} - \dfrac{1}{4} + o(1)$.
On peut reprendre le calcul pour obtenir un terme de plus :
$\dfrac{1}{u_n} = \dfrac{1}{n^{\frac{1}{4}} - \frac{1}{4} + o(1)} = \dfrac{1}{n^{\frac{1}{4}}} \times \dfrac{1}{1 - \frac{1}{4} n^{-\frac{1}{4}} + o(n^{-\frac{1}{4}})} = n^{-\frac{1}{4}} \left(1 + \dfrac{1}{4} n^{-\frac{1}{4}} + o(n^{-\frac{1}{4}})\right) = n^{-\frac{1}{4}} + \dfrac{1}{4} n^{-\frac{1}{2}} + o(n^{-\frac{1}{2}})$. On enchaîne : $u_n^4 = \dfrac{n}{1 + \frac{1}{u_n}} = \dfrac{n}{1 + n^{-\frac{1}{4}} + \frac{1}{4} n^{-\frac{1}{2}} + o(n^{-\frac{1}{2}})} = n \left(1 - n^{-\frac{1}{4}} - \dfrac{1}{4} n^{-\frac{1}{2}} + n^{-\frac{1}{2}} + o(n^{-\frac{1}{2}})\right) = n \left(1 - n^{-\frac{1}{4}} + \dfrac{3}{4} n^{-\frac{1}{2}} + o(n^{-\frac{1}{2}})\right)$. On passe une dernière fois le tout à la puissance $\dfrac{1}{4}$: $u_n = n^{\frac{1}{4}} \times \left(1 - \dfrac{1}{4} n^{-\frac{1}{4}} + \dfrac{3}{16} n^{-\frac{1}{2}} + \dfrac{1}{4} \times \left(-\dfrac{3}{4}\right) \times \frac{1}{2} n^{-\frac{1}{2}} + o(n^{-\frac{1}{2}})\right) = n^{\frac{1}{4}} \times \left(1 - \dfrac{1}{4} n^{-\frac{1}{4}} + \dfrac{3}{32} n^{-\frac{1}{2}} + o(n^{-\frac{1}{2}})\right)$.

Conclusion de ce sublime calcul : $u_n = n^{\frac{1}{4}} - \frac{1}{4} + \frac{3}{32n^{\frac{1}{4}}} + o\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{4}}}\right)$.

3.4 Points stationnaires de courbes paramétrées

Exemple : Étude des points stationnaires de l'astroïde $\left\{\begin{array}{lcl} x(t) & = & \cos^3(t) \\ y(t) & = & \sin^3(t) \end{array}\right.$.

Encore un exemple de calcul qu'on sait très bien faire sans développements limités, mais pour lequel on pourra gagner du temps. En effet, déterminer la nature d'un point stationnaire suppose de connaître les valeurs des différentes dérivées de x et de y au point considéré. pour cela, pas besoin de calculer explicitement les dérivées successives, un DL nous donnera directement les valeurs via l'identification avec la formule de Taylor-Young.

Ici, on va se concentrer sur le point stationnaire en $(1, 0)$ obtenu pour $t = 0$. Comme ça, on n'aura que des DL en 0 à faire. Allons-y : $\cos^3(t) = \left(1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{24}t^4 + o(t^4)\right)^3 = 1 - \frac{3}{2}t^2 + \frac{1}{8}t^4 + o(t^4)$. En découle que $x'(0) = 0$ (ce n'est pas une surprise), $x''(0) = -3$ (attention à ne pas oublier les $k!$ du dénominateur dans la formule de Taylor), $x'''(0) = 0$ et $x^{(4)}(0) = 3$. De même, on calcule $\sin^3(t) = \left(t - \frac{1}{6}t^3 + o(t^4)\right)^3 = t^3 + o(t^4)$. C'est encore plus simple : la seule dérivée non nulle est $y'''(t) = 6$. En particulier, le vecteur dérivé seconde en 0 est horizontal, ce qui donne la direction de la tangente, et le vecteur dérivé tierce est vertical, donc non colinéaire au précédent. Nous sommes en présence d'un point de rebroussement de première espèce.