Dimension des espaces vectoriels

PTSI B Lycée Eiffel

20 avril 2013

J'ai simplement pensé à l'idée d'une projection, d'une quatrième dimension invisible, autrement dit que tout objet de trois dimensions, que nous voyons froidement, est une projection d'une chose à quatre dimensions, que nous ne connaissons pas.

Marcel Duchamp

Un mathématicien et un ingénieur assistent à une conférence sur les processus physiques intervenant dans les espaces de dimension 9*. Le mathématicien est assis et apprécie beaucoup la conférence, pendant que l'ingénieur fronce les sourcils et semble complètement embrouillé. À la fin, l'ingénieur demande au matheux : « Comment fais-tu pour comprendre tout cela ? » « C'est simple ! D'abord tu visualises le processus en dimension* n*, et ensuite il suffit de prendre* $n = 9$*. »*

Introduction

Ce deuxième chapître consacré aux espaces vectoriels n'est en fait qu'une sorte de complément au premier, visant à définir rigoureusement la notion de dimension déjà évoquée dans le précédent chapître, et à donner de nouvelles méthodes permettant d'alléger les calculs et démonstrations classiques en algèbre linéaire. Peu de notions nouvelles en vue, si ce n'est celle de rang qui est centrale en algébre linéaire en dimension finie.

Objectifs du chapitre :

- savoir utiliser des arguments de dimension pour simplifier les démonstrations d'algèbre linéaire.
- comprendre et utiliser efficacement le théorème du rang.

1 Espaces vectoriels de dimension finie

1.1 Définitions

Définition 1. Un espace vectoriel E est **de dimension finie** s'il admet une famille génératrice finie.

Proposition 1. Soit $(e_1, \dots, e_k)$ une famille libre de vecteurs de E, et $e_{k+1} \notin \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$, alors la famille $(e_1, e_2, \dots, e_{k+1})$ est une famille libre.
Si au contraire la famille $(e_1, \dots, e_{k+1})$ est génératrice et $e_{k+1} \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$, alors la famille $(e_1, \dots, e_k)$ est encore génératrice.

Démonstration. Supposons qu'une combinaison linéaire annule la famille : $\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i e_i = 0$, alors $\lambda_{i+1}e_{i+1} = -\sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i$. Le membre de droite appartenant sûrement à $\text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$, l'égalité n'est possible que si $\lambda_{k+1} = 0$. mais alors le membre de droite est nul, ce qui implique par liberté de la famille $(e_1, \dots, e_k)$ que tous les coefficients λ_i sont nuls. La famille $(e_1, \dots, e_{k+1})$ est donc bien libre. Prouvons maintenant la deuxième propriété : d'après l'hypothèse, $e_{k+1} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i$. La famille étant par ailleurs génératrice, on peut écrire, pour tout vecteur x, que $x = \sum_{i=1}^{k+1} \mu_i e_i = \sum_{i=1}^{k} (\mu_i + \lambda_i) e_i$ en remplaçant e_{k+1} par sa valeur. La famille $(e_1, \dots, e_k)$ est donc génératrice. □

Théorème 1. Théorème de la base incomplète.
Soient $\mathcal{F} = (e_1, \dots, e_k)$ et $\mathcal{G} = (f_1, \dots, f_p)$ deux familles respectivement libre et génératrice d'un même espace vectoriel E, alors on peut compléter la première famille en une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E à l'aide de vecteurs $(e_{k+1}, \dots, e_n)$ appartenant à la famille $\mathcal{G}$.

Démonstration. La démonstration de ce théorème fondamental est en fait très constructive : on fait la liste des vecteurs de la famille $\mathcal{G}$, un par un, et on essaie de les ajouter à la famille $\mathcal{F}$ (éventuellement déjà un peu augmentée). À chaque vecteur, s'il est dans l'espace vectoriel engendré par la famille dont on dipose au moment de l'ajout, on l'oublie, sinon on l'ajoute à la famille. D'après la proposition précédente, la famille ainsi obtenue sera nécessairement libre puisqu'obtenue en ajoutant à la famille libre $\mathcal{F}$ des vecteurs n'appartenant jamais à l'espace vectoriel engendré par les précédents. Elle est par ailleurs génératrice car obtenue à partir de $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ en supprimant des vecteurs appartenant quand à eux à l'espace engendré par d'autres vecteurs de la famille. C'est donc une base. □

Remarque 1. Ceette démonstration donne un algorithme pratique pour compléter une famille libre de n'importe quel espace usuel en base : on prend les vecteurs de la base canonique et on tente de les ajouter l'un après l'autre à notre famille.

Proposition 2. Lemme de Steinitz. Soit $(e_1, \dots, e_k)$ une famille génératrice d'un espace vectoriel E et $(f_1, \dots, f_{k+1})$ une autre famille du même espace vectoriel E, alors la famille $(f_1, \dots, f_{k+1})$ est nécessairement liée.

Démonstration. On procède par récurrence sur k. Pour $k = 0$, c'est vrai, la première famille étant vide, elle ne peut engendrer que l'espace vectoriel $E = \{0\}$, donc la deuxième famille contient un vecteur qui est le vecteur nul, et cette famille est liée (oui, le vecteur nul tout seul constitue une famille liée). Supposons la propriété vraie au rang k, et ajoutons un vecteur à chaque famille. La famille $(e_1, \dots, e_{k+1})$ étant supposée génératrice, $f_j = \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_{i,j} e_i$ pour tout entier $j \leqslant k+2$. Si tous les coefficients $\lambda_{k+1,j}$ sont nuls, alors tous les vecteurs de la deuxième famille sont combinaisons linéaires de $(e_1, \dots, e_k)$, on peut appliquer directement l'hypothèse de récurrence pour conclure que $(f_1, \dots, f_{k+1})$ est liée, ce qui ne risque pas de s'améliorer si on ajouter f_{k+2}. Sinon, supposons par exemple, quitte à réordonner les vecteurs de la deuxième famille, que $\lambda_{k+1,k+2} \neq 0$, on pose alors, pour tout entier $i \leqslant k+1$, $g_i = f_i - \frac{\lambda_{k+1,i}}{\lambda_{k+1,k+2}} f_{k+2}$, de façon à annuler la coordonnée suivant x_{k+1}. La famille $(g_1, \dots, g_{k+1})$ est alors constituée de vecteurs dans $\text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$, par hypothèse de récurrence, elle est liée. Cela signifie qu'il y a une relation linéaire du type $\sum_{j=1}^{k+1} \mu_j \left(f_i - \frac{\lambda_{k+1,i}}{\lambda_{k+1,k+2}} f_{k+2} \right) = 0$. Quitte à tout développer, il s'agit d'une relation liant les vecteurs $(f_1, \dots, f_{k+2})$, qui forment donc une famille liée. □

Théorème 2. Dans un espace vectoriel E de dimension finie, il existe au moins une base finie. Toutes les bases finies ont par ailleurs le même nombre d'éléments, appelé **dimension** de l'espace vectoriel. On la note en général $\dim(E)$.

Démonstration. Par définition, un espace de dimension finie contient une famille génératrice finie. Il contient par ailleurs des familles libres, par exemple la famille libre. Le théorème de la base incomplète assure alors qu'on peut construire une base finie de E. Supposons désormais qu'il existe deux bases de cardinal différent, notons $\mathcal{B}$ celle contenant le moins de vecteurs (on notera n le nombre de vecteurs de $\mathcal{B}$). La famille $\mathcal{B}$ étant génératrice, le lemme de Steinitz assure que toute famille de $n+1$ vecteurs est liée. En particulier, n'importe quelle sous-famille de $n+1$ vecteurs de la base $\mathcal{C}$ est liée, ce qui est absurde pour une base. Toutes les bases ont donc bien le même nombre d'éléments. $\square$

Exemples : Parmi les espaces vectoriels classiques, $\mathbb{K}^n$ est un espace de dimension n sur $\mathbb{K}$; $\mathbb{K}_n[X]$ est de dimension $n+1$; $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est de dimension np, tout comme $\mathcal{L}(E,F)$ quand E et F sont de dimensions respectives n et p. Attenion tout de même, $\mathcal{C}$ est un espace vectoriel complexe de dimension 1, mais aussi un espace vectoriel réel de dimension 2, puisque $\mathbb{C} = \{a+ib \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\} = \mathrm{Vect}(1,i)$, et $(1,i)$ est une famille libre sur $\mathbb{R}$ (mais pas sur $\mathbb{C}$).

Proposition 3. Dans un espace vectoriel de dimension n :

- Toute famille libre possède au maximum n vecteurs.
- Toute famille génératrice possède au minimum n vecteurs.
- Toute famille libre de n vecteurs est une base.
- Toute famille génératrice de n vecteurs est une base.

Démonstration. En effet, une famille libre peut, d'après le théorème de la base incomplète, être complétée en une base de E, qui contiendra nécessairement n vecteurs. il faut donc qu'on soit parti d'une famille de moins de n vecteurs. Par ailleurs, si la famille avait déjà n vecteurs, la complétion sera vite faite, on ne rajoute rien (sinon on aura strictement plus de n vecteurs), la famille était donc déjà une base. De même pour une famille génératrice, on peut trouver une base incluse dans la famille en appliquant le théorème de la base incomplète avec la famille libre vide. La fin du raisonnement est alors complètement symétrique de ce qu'on vient de faire pour une famille libre. $\square$

Proposition 4. Tout espace vectoriel de dimension n est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.
Deux espaces vectoriels de dimension finie sont isomorphes si et seulement si ils ont même dimension.

Démonstration. Il suffit de choisir une base de E et d'envoyer ses éléments sur ceux de la base canonique de $\mathbb{K}$, puisque l'application transorme une base en une base, c'est un isomorphisme. La deuxième propriété est alors immédiate, si deux espaces ont même dimension, ils sont tous deux isomorphes à $\mathbb{K}^n$, donc isomorphes (la réciproque est triviale). $\square$

Exemple : Il suffira désormais de prouver qu'un famille est libre **ou** génératrice pour prouver qu'elle est une base d'un espace vectoriel usuel, ce qui simplifie grandement les démonstrations. En général, on prouve la liberté, ce qui est plus facile. Ainsi, la famille $((1,2);(-3,7))$ est libre dans $\mathbb{R}^2$ et contient deux vecteurs, c'est donc une base.

1.2 Sous-espaces vectoriels et dimension.

Proposition 5. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E, alors F est de dimension finie et $\dim(F) \leqslant \dim(E)$.

Démonstration. Les familles libres de F étant aussi des familles libres de E, elles ne peuvent pas avoir plus de n élemnts. Prenons une famille libre dans F qui soit de cardinal le plus grand possible. Cette famille est alors forcément génératrice de F, puisque dans le cas contraire, on pourrait trouver un vecteur n'appartenant pas à l'espace engendré par notre famille, et, en l'ajoutant à la famille, créer une famille toujours libre mais contenant plus d'éléments que la famille libre maximale ! L'espace F est donc de dimension finie, et la base qu'on vient d'en construire contient moins de n vecteurs, d'où l'inégalité sur les dimensions. $\square$

Remarque 2. On aura $F = E$ si et seulement si $\dim(F) = \dim(E)$, ce qui permet de simplifier les preuves d'égalité entre espaces vectoriels quand on a des informations sur leurs dimensions (on peut procéder par simple inclusion et non plus par double inclusion).

Théorème 3. Formule de Grassmann.
Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels d'un même espace E, alors $\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$. En particulier, si F et G sont supplémentaires dans E, alors $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$.

Démonstration. Cette formule nous rappelle diablement celle du cardinal d'une union de deux ensembles. C'est en fait tout à fait logique, puisqu'elle s'identifie exactement à une formule de cardinal d'union si on considère des bases de chacun des espaces vectoriels concernés. Nous allons d'ailleurs la prouver en suivant le même schéma, c'est-à-dire en commençant par le cas particulier où F et G sont supplémentaires. Notons $(f_1, \dots, f_k)$ une base de F et $(g_1, \dots, g_p)$ une base de G et prouvons que $(f_1, \dots, f_k, g_1, \dots, g_p)$ est une base de E (l'égalité des dimensions en découlera immédiatement). Soit $x \in E$, comme F et G sont supplémentaires, on peut décomposer x en $x_F + x_G$ (avec les notations classiques utilisées dans notre précédent chapître sur les espaces vectoriels). Par ailleurs, $x_F = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_i$, et $x_G = \sum_{j=1}^{p} \mu_j g_j$. Le vecteur x s'écrit donc comme combinaison linéaire de la famille $(f_1, \dots, f_k, g_1, \dots, g_p)$, qui est donc génératrice. Reste à prouver qu'elle est libre, supposons que $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_i + \sum_{j=1}^{p} \mu_j g_j = 0$, on peut écrire $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_i = -\sum_{j=1}^{p} \mu_j g_j$. Le membre de gauche est dans F, celui de droite dans G, l'intersection de ces deux sous-espaces est réduite à $\{0\}$ puisqu'ils sont supplémentaires, les deux membres sont donc nuls. Mais les familles $(f_1, \dots, f_k)$ et $(g_1, \dots, g_p)$ étant libres, cela implique la nullité de tous les coefficients de la combinaison linéaire, et donc la liberté de la famille.

Passons au cas général. Notons F' un supplémentaire de $F \cap G$ dans F et G' un supplémentaire de $F \cap G$ dans G (de tels supplémentaires existent, il suffit de compléter une base de $F \cap G$ en base de F ou de G et de conserver les vecteurs ajoutés pour en obtenir une base d'après la première partie de la démonstration). On peut certainement affirmer que $\dim(F) = \dim(F') + \dim(F \cap G)$ et $\dim(G) = \dim(G') + \dim(F \cap G)$. Par ailleurs, F' et G sont supplémentaires dans $F + G$. En effet, leur intersection est réduite à $\{0\}$ puisqu'un vecteur de l'intersection appartiendrait à la fois à F' et à $F \cap G$, qui sont supplémentaires dans F, et leur somme est bien égale à $F + G$: un vecteur pouvant s'écrire sous la forme $x_F + x_G$ peut encore se décomposer en $x_{F'} + x_{F \cap G} + x_G$, avec $x_{F \cap G} + x_G \in G$. Toujours en appliquant notre formule dans le cas particulier démontré, $\dim(F+G) = \dim(F') + \dim(G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$. □

Remarque 3. La formule de Grassmann permet encore une fois de réduire considérablement le travail à effectuer, cette fois-ci pour prouver que deux sous-espaces sont supplémentaires. Il suffit en effet de prouver, au choix :

- que $F \cap G = \{0\}$ et $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$.
- que $F + G = E$ et $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$.

Exemple : Si on reprend l'exemple traité dans le chapître précédent des matrices symétriques et antisymétriques dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, une fois obtenues les dimensions 6 et 3 respectives des deux sous-espaces, prouver que leur intersection est nulle suffit (et c'est facile). Plus généralement, dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, les matrices symétriques forment un sous-espace de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$, les antisymétriques un sous-espace de dimension $\dfrac{n(n-1)}{2}$, et ils sont toujours supplémentaires (la somme des dimensions vaut bien n^2, et seule la matrice nulle est à la fois symétrique et antisymétrique).

Définition 2. Dans un espace vectoriel de dimension n, un **hyperplan** est un sous-espace de dimension $n - 1$.

2 Rang

Définition 3. Soit $\mathcal{F} = (e_1, \ldots, e_k)$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E, on appelle **rang de la famille** $\mathcal{F}$ la dimension de $\text{Vect}(e_1, \ldots, e_k)$.

Remarque 4. La famille est libre si et seulement si son rang est égal au nombre de vecteurs qu'elle contient.

Définition 4. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, le **rang de** f, s'il existe, est la dimansion de l'image de f. On le note $\text{rg}(f)$.

Remarque 5. Pour faire le lien avec la définition précédente, $\text{rg}(f) = \text{rg}(f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n))$, où $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base quelconque de E. Pour être très rigoureux, cette égalité ne peut avoir de sens que si E est de dimension finie, alors que le rang de f peut être défini même si E n'est pas de dimension finie.

Théorème 4. Théorème du rang.
Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, où E est un espace vectoriel de dimension finie, alors $\text{rg}(f) + \dim(\ker(f)) = \dim(E)$.

Remarque 6. Le théorème du rang n'affirme absolument pas que le noyau et l'image de f sont supplémentaires, c'est faux en général (voir l'exemple suivant la démonstration).

Démonstration. L'idée est de démontrer qu'à défaut d'être supplémentaire de $\ker(f)$, $\text{Im}(f)$ est isomorphe à tout supplémentaire de $\ker(f)$ (et donc a la même dimension, ce qui prouve immédiatement le théorème). Soit donc G un supplémentaire de $\ker(f)$ (dont l'existence est assurée, rappelons-le, par le théorème de la base incomplète). Montrons que $f_{|G}$ est un isomorphisme de G sur $\text{Im}(f)$. Soit $x \in \ker(f_{|G})$, on a donc $f(x) = 0$, soit $x \in \ker(f)$. Cet espace étant supplémentaire de G, leut intersection est réduite au vecteur nul, donc $x = 0$. Soit maintenant $y \in \text{Im}(f)$, donc $y = f(x)$, avec $x \in E$. Ce vecteur x peut se décomposer en $x_G + x_K$, avec $x_G \in G$ et $x_K \in \ker(f)$. Comme $f(x_K) = 0$, $y = f(x) = f(x_G) \in \text{Im}(f_{|G})$, ce qui prouve que $\text{Im}(f) = \text{Im}(f_{|G}$. L'aplication f restreinte à G est bel et bien un isomorphisme, le théorème en découle. $\square$

Exemple : Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.
Les deux premières colonnes de la matrice étant identiques et les deux dernières opposées, on constate aisément que $\text{Im}(f) = \text{Vect}((1, -1, 0, 0); (0, 0, 1, -1))$, donc f est de rang 2. La détermination du noyau amène de même à un système constitué de deux paires d'équations identiques, et $\ker(f) = \{(x, -x, z, z) \mid (x, z) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}((1, -1, 0, 0); (0, 0, 1, 1))$. Le noyau est également de dimension 2 (encore heureux, sinon le théorème du rang serait mis en défaut), mais noyau et image ne sont pas supplémentaires. On peut s'amuser ici à calculer $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. On trouve alors $\text{Im}(f^2) = \text{Vect}((0, 0, -1, 1))$ et $\ker(f^2) = \text{Vect}((1, 0, 0, 0); (0, 1, 0, 0); (0, 0, 1, 1))$. Cette fois-ci, les deux sous-espaces sont supplémentaires. D'ailleurs, les composées suivantes de f ont les mêmes noyaux et images de f^2. On peut prouver plus généralement que, pour tout endormorphisme f d'un espace de dimension finie, les noyaux et images de f^k finissent par se stabiliser sur des sous-espaces supplémentaires.

Corollaire 1. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, où E est un espace vectoriel de dimension finie, f est bijectif si et seulement si il est injectif ou surjectif.

Démonstration. En effet, si par exemple f est injectif, $\dim(\ker(f)) = 0$, donc en appliquant le théorème du rang $\text{rg}(f) = \dim(E)$, ce qui assure que $\text{Im}(f) = E$, et donc que f est également surjectif. C'est à peu près la même chose si on suppose f surjectif. $\square$

Remarque 7. Une conséquence pas évidente du tout de ce résultat est une propriété énoncée sans démonstration sur les matrices : s'il existe une matrice N telle que $MN = I$ ou $NM = I$, alors automatiquement les matrices N et M commutent et M est inversible. En effet, si on note f l'application linéaire dont M est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$, la condition $NM = I$ (par exemple) assure que $g \circ f = \mathrm{id}$, ce qui implique l'injectivité de f (sinon $g \circ f$ ne pourrait pas l'être), donc sa bijectivité.

Exemple : La remarque précédente ne s'applique absolument pas en dimension infinie. Si on note f l'application définie sur l'ensemble de toutes les suites réelles par $f(u_n) = v_n$, où $v_n = u_{n+1}$ (décalage de tous les termes de la suite vers la gauche, en supprimant le premier). L'application f est surjective mais pas injective. En fait, en notant $g(u_n) = w_n$, avec $w_0 = 0$ et $\forall n \geqslant 1$, $w_n = u_{n-1}$, on a $f \circ g = \mathrm{id}$, mais $g \circ f \neq \mathrm{id}$ (on transforme le premier terme de la suite en 0). L'application g, quant à elle, est injective mais pas surjective.

Exemple : Soient x_0, x_1, …, x_n des réels deux à deux distincts et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$ l'endomrophisme défini par $f(P) = (P(x_0), P(x_1), \dots, P(x_n))$. Le noyau de f est réduit au polynôme nul car c'est le seul polynôme de degré inférieur ou égal à n pouvant avoir $n+1$ racines distinctes. Par conséquent, f est un isomorphisme. Cela prouve que, pour tous réels a_0, a_1, …, a_n, il existe un unique polynôme de degré n (au plus) tel que $\forall i \in \{0, \dots, n\}$, $P(x_i) = a_i$. Ces polynômes sont appelées polynômes interpolateurs de Lagrange. On peut en fait les expliciter : $L(x) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$. En effet, chacun des produits s'annule pour toutes les valeurs de x_j sauf pour x_i où il vaut 1 à cause de la division par $x_i - x_j$.

Définition 5. Une **forme linéaire** sur un espace vectoriel E est une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$.

Proposition 6. Si E est de dimension finie, le noyau d'une forme linéaire non nulle est un hyperplan de E.

Démonstration. Il n'y a pas beaucoup de choix pour le rang d'une forme linéaire : soit il est nul, et f est alors l'application nulle ; soit il vaut 1, et d'après le théorème du rang on a alors $\dim(\ker(f)) = n - 1$. □

Exemple : La trace est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n^(\mathbb{K})$. L'ensemble des matrices de trace nulle est donc un hyperplan (de dimension $n^2 - 1$ dans ce cas) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Définition 6. Le **rang d'une matrice** $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est le rang de la famille constituée des vecteurs-colonnes de la matrice M (coordonnées prises par exemple dans la base canonique).

Remarque 8. Autrement dit, le rang de M est le rang de l'application linéaire qu'elle représente dans les bases canoniques (ou dans n'importe quelles autres bases).

Proposition 7. Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est de rang n si et seulement si elle est inversible.

Démonstration. En effet, M est de rang n si l'application linéaire associée est de rang n, donc bijective. □

Théorème 5. Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est de rang r si et seulement si $M = QJ_rP$, où P et Q sont deux matrices inversibles, et $J_r = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & \dots & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & 0 \\ 0 & & \dots & & 0 & 0 \end{pmatrix}$, avec r fois 1 et $n - r$ fois 0 sur la diagonale.

Théorème 6. C'est en fait facile à prouver. Soit f l'application associée à M dans la base canonique. Puisque $\text{rg}(f) = r$, son noyau est de dimension $n - r$. On peut construire une base de E de la forme $(e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_n)$, où $(e_{r+1}, \dots, e_n) \in \ker(f)^{n-r}$. On sait alors (démonstration du théorème du rang) que $f_{|\,\text{Vect}(e_1,\dots,e_r)}$ est un isomorphisme sur $\text{Im}(f)$. En particulier, $(f(e_1), \dots, f(e_r))$ est une famille libre de E, qu'on peut compléter en base. Dans ces deux bases, l'application f a par construction pour matrice J_r. En notant P et Q les matrices de passage idoines (de la base canonique vers la première base pour P, de la deuxième base vers la base canonique pour Q), les formules de changement de base assurent que $M = QJ_rP$.

Proposition 8. Le rang d'une matrice est invariant par opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes de la matrice.

Démonstration. C'est assez immédiat si on songe que le rang représente la dimension de l'image de l'application linéaire associée. Un échange de colonnes échange deux images sans rien changer à sa dimension. Un produit par une constante non nulle d'une colonne ne modifie sûrement pas l'espace engendré par le vecteur correspondant. Et remplacer dans une famille génératrice un vecteur par une combinaison linéaire de lui-même et d'autres vecteurs de la famille ne modifie pas non plus la dimension de l'espace vectoriel engendré. Il est plus délicat de comprendre pourquoi le rang n'est pas modifié par opérations sur les lignes, ce qui découle du fait qu'une matrice a toujours le même rang que sa transposée. Nous admettrons cette partie de la preuve. □

Exemple : On peut donc calculer le rang en appliquant une sort de pivot de Gauss à notre matrice, jusqu'à la transformer en matrice diagonale (et même en J_r). En pratique, on se contente souvent de mélanger opérations sur les lignes et les colonnes jusqu'à obtenir une matrice dont le rang est évident. Ainsi, $\text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$ en effectuant les opérations $C_1 \leftarrow C_1 + C_4$ et $C_3 \leftarrow C_3 - 3C_4$.