Fonctions à deux variables

PTSI B Lycée Eiffel

5 juillet 2013

Il faut avoir beaucoup étudié pour savoir peu.

Montesquieu.

Étudie, non pour savoir plus, mais pour savoir mieux.

Sénèque.

Il n'y a pas de problèmes, il n'y a que des professeurs.

Jacques Prévert.

Introduction

Pour ce dernier chapître de l'année, nous allons faire un rapide survol des techniques d'étude et de calcul reliées aux fonctions à deux variables que vous approfondirez l'an prochain. Au programme, des choses que vous avez pour la plupart déjà croisées en physique ou en SII : calcul de dérivées partielles, calus d'intégrales doubles, et un tout petit peu de champs de vecteurs.

Objectifs du chapitre :

- savoir calculer des dérivées partielles et déterminer des points critiques.
- comprendre l'intérêt des intégrales doubles et de la formule de Green-Riemann pour le calcul d'aires.

1 Continuité, dérivées partielles

1.1 Aspect graphique

Définition 1. Une **fonction à deux variables** est une application $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, où $\mathcal{D}$ est une sous-ensemble du plan $\mathbb{R}^2$ appelé **domaine de définition** de la fonction f.

Exemples : La fonction $f : (x,y) \mapsto x^3 + 2x^2y + xy^3 - 4y^2$ est une fonction à deux variables définie sur $\mathbb{R}^2$ tout entier. La fonction $g : (x,y) \mapsto \ln(x+y-1)$ est une fonction définie sur l'ensemble des couples (x,y) vérifiant $x+y-1>0$, qui se trouve être le demi-plan supérieur ouvert délimité par la droite d'équation $y = 1-x$. La fonction $h : (x,y) \mapsto \sqrt{4-x^2-y^2}$ est définie à l'intérieur du cercle de centre O et de rayon 2.

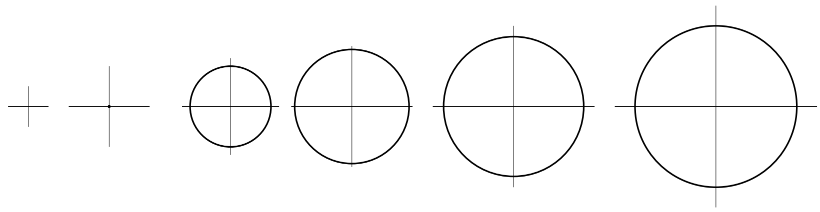
Définition 2. La **surface représentative** d'une fonction à deux variables dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace est l'ensemble des points $M(x,y,z)$ vérifiant $z = f(x,y)$.

Remarque 1. Une fonction à deux variables n'est donc pas représentée par une courbe. Il est très difficile en général de visualiser ce genre de représentations graphiques, c'est pourquoi on en est souvent réduit à étudier les coupes de la surface par des plans simples.

Définition 3. Soit k un réel et f une fonction de deux variables, la **ligne de niveau** k de la fonction f est l'ensemble des couples (x,y) vérifiant $f(x,y) = k$.

Remarque 2. Il s'agit donc de la coupe de la surface représentative de f par le plan « horizontal » d'équation $z = k$. La plupart du temps, une ligne de niveau n'est pas la courbe représentative d'une fonction à une variable.

Exemple : Considérons la fonction $f(x,y) = x^2 + y^2$, sa ligne de niveau k est définie par l'équation $x^2 + y^2 = k$. Il s'agit donc du cercle de centre O et de rayon $\sqrt{k}$ quand k est positif, la ligne de niveau est vide sinon. Voici une représentation des lignes de niveau pour k entier compris entre -1 et 4. Il ne reste plus qu'à les relier mentalement pour imaginer l'allure de la surface représentative de f.



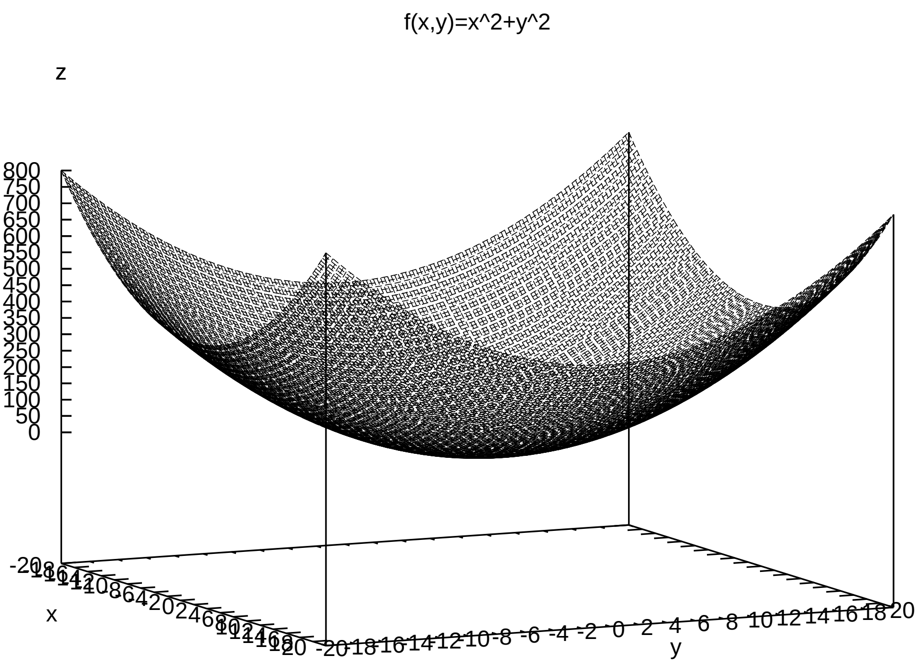
Définition 4. Soit $f : (x,y) \mapsto f(x,y)$ à deux variables, les **applications partielles** associées sont les deux fonctions à une variable $f_x : x \mapsto f(x,y)$ et $f_y : y \mapsto f(x,y)$.

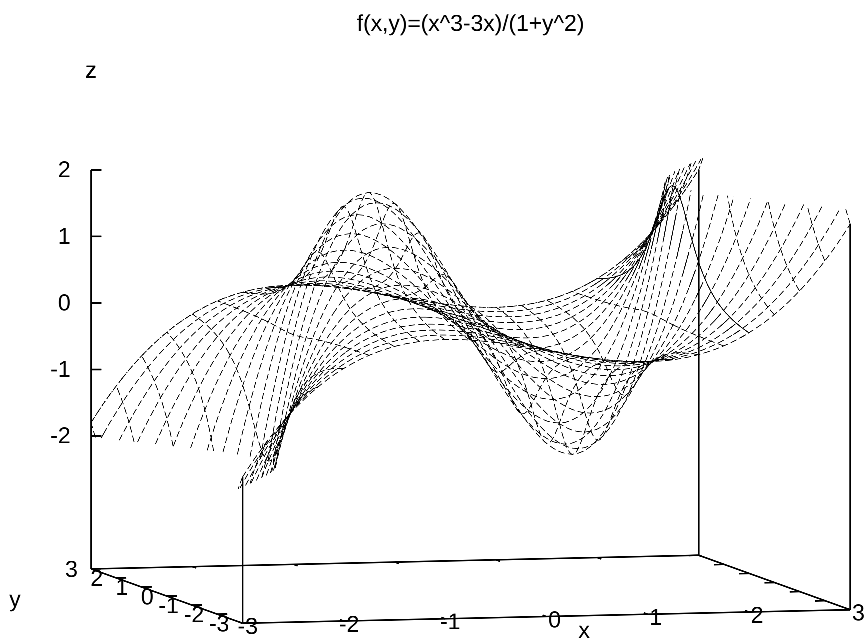
Remarque 3. Les applications partielles sont donc données par la même équation que la fonction f elle-même, seul le statut de x et de y change : au lieu d'avoir deux variables, l'une d'elles est désormais fixée (sa valeur dépend du point (x,y) en lequel on regarde les applications partielles). Par exemple, si $f(x,y) = x^2 - 3xy + y^3$, on dira que l'application partielle obtenue en fixant $y = 1$ est la fonction d'une variable $x \mapsto x^2 - 3x + 1$ (on a posé $y = 1$ dans l'équation de f), ou que l'application partielle obtenue en fixant $x = 2$ est la fonction $y \mapsto 4 - 6y + y^3$. Tracer les représentations graphiques de ces applications partielles revient à tracer la coupe de la surface représentative de f par les plans d'équation respective $y = 1$ et $x = 2$ (plans « verticaux » si on oriente le repère de façon habituelle).

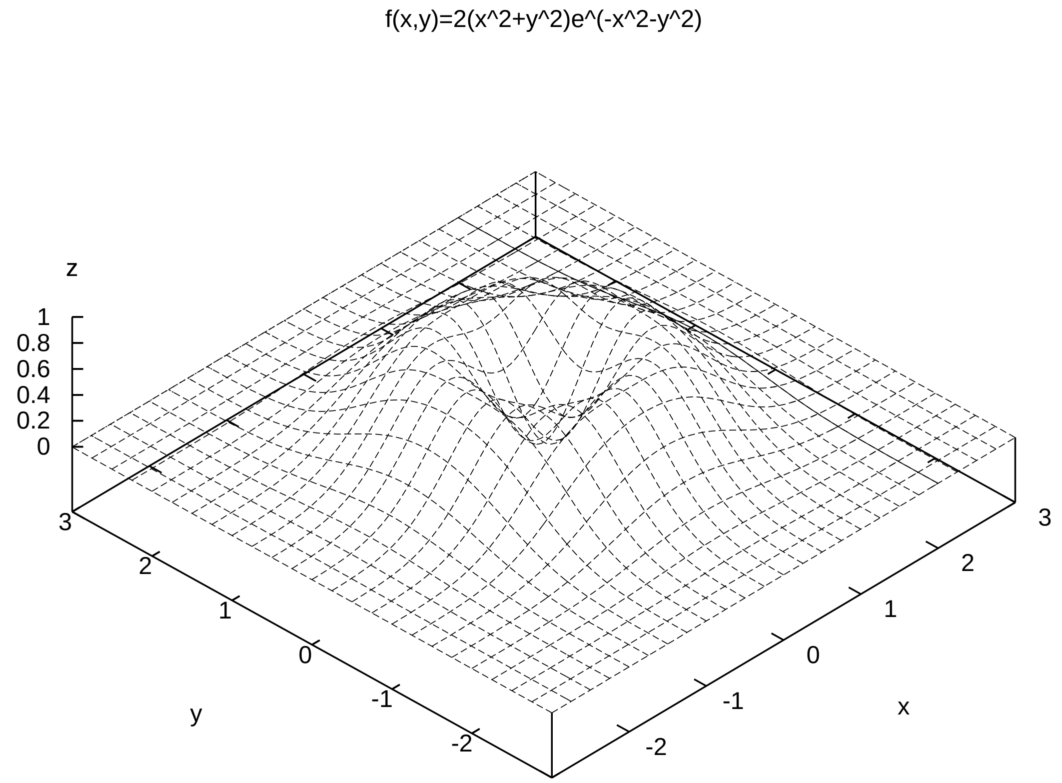
Remarque 4. Les courbes des applications partielles et les lignes de niveau permettent de reconstituer l'intégralité de la surface. Reprenons notre fonction $f : (x,y) \mapsto x^2 + y^2$. On a déjà vu que ses lignes de niveau étaient des cercles. Les applications partielles sont toutes représentées par des paraboles. En particulier, à l'origine, elles ont pour équation $x \mapsto x^2$ et $y \mapsto y^2$ (donc les courbes en sont identiques). D'où l'allure globale de la surface, appelée paraboloïde de révolution car elle est obtenue en faisant « tourner » une parabole autour de l'axe (Oz), premier exemple du paragraphe suivant.

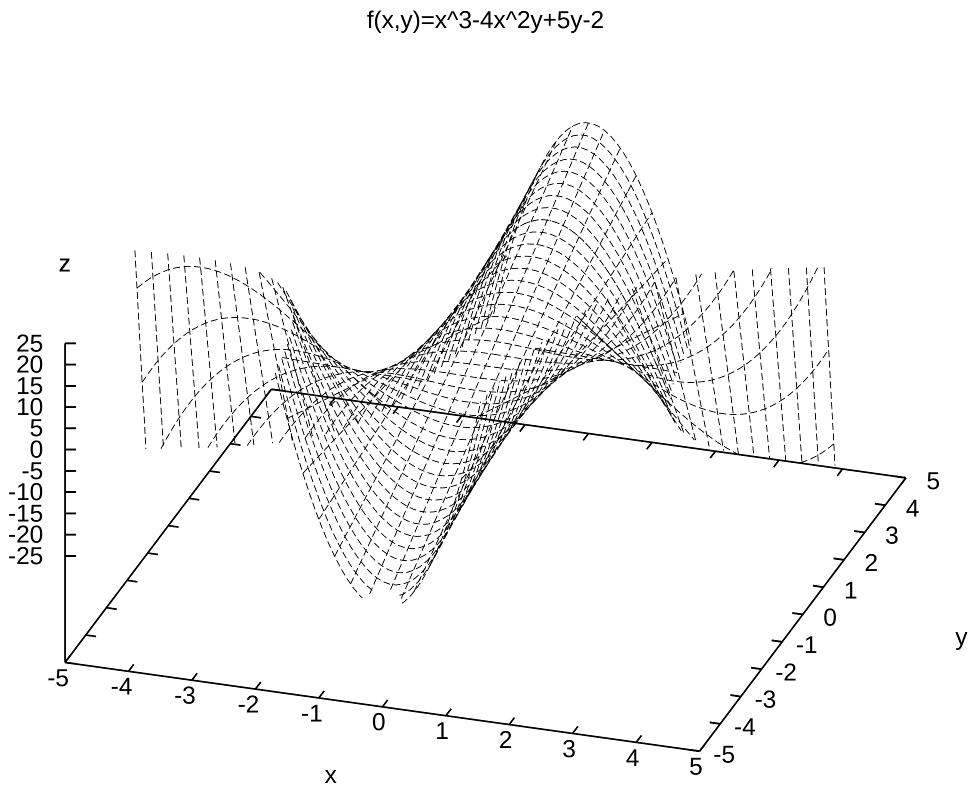
1.2 Exemples de surfaces

Juste quelques surfaces tracées à l'ordinateur pour avoir une idée de ce à quoi ça peut ressembler.






f(x,y)=2(x^2+y^2)e^(-x^2-y^2)
z
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
3
2
1
0
-1
-2
y
3
2
1
0
-1
-2
x


f(x,y)=x^3-4x^2y+5y-2
z
25
20
15
10
5
0
-5
-10
-15
-20
-25
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
x
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
y

1.3 Continuité

Définition 5. Une fonction $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}^2$ admet en un point $M(a,b)$ une **limite finie** $l \in \mathbb{R}$ si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \eta > 0$, $0 < \|(x,y) - (a,b)\| < \eta \Rightarrow |f(x,y) - f(a,b)| < \varepsilon$.

Remarque 5. Cette définition est exactement la même que pour une fonction à une variable, en remplaçant les valeurs absolues par des normes. De fait, la valeur absolue est bien la distance associée au produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}$. On peut très facilement généraliser cette notion de continuité à des fonctions à n variables, pour tout entier naturel n non nul.

Définition 6. Une **boule ouverte** de centre (a,b) et de rayon $r > 0$ dans $\mathbb{R}^2$ est l'ensemble $\mathcal{B} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x,y) - (a,b)\| < r\}$. Un sous-ensemble U de $\mathbb{R}^2$ est un **ouvert** si $\forall (x,y) \in U$, il existe un rayon $r > 0$ tel que la boule ouverte de centre (x,y) et de rayon r soit entièrement incluse dans U. Un **voisinage** de $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ contenant (x,y).

Remarque 6. Un ouvert de $\mathbb{R}^2$ est donc voisinage de chacun de ses points, c'est-à-dire qu'il contient une boule ouverte autour de chaque point. Intuitivement, un ouvert est un ensemble qui n'a pas de « bord ». Nous ne rentrerons pas plus dans les détails de la passionnante branche des mathématiques qui s'appelle la topologie. Sachez simplement que les ouverts sont les ensembles sur lesquels il est le plus facile d'étudier des fonctions à plusieurs variables, et qu'on supposera ainsi la plupart du temps que nos fonctions sont définies sur des ouverts, sans plus de précision.

Proposition 1. Si $f(x,y) \leqslant k\|(x,y)\|$ sur un voisinage de l'origine, alors $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

Démonstration. Il suffit de prendre $\eta = \dfrac{\varepsilon}{k}$ dans la définition de la limite. Notons qu'il suffit que nos inégalités soient valables sur un voisinage de l'origine, puisqu'elle le seront alors sur une boule ouverte de rayon r centrée en l'origine ; si jamais η fait déborder nos valeurs de cette boule ouverte, on prend r à la place de η et la définition restera vérifiée. □

Exemple : Soit $f : (x,y) \mapsto \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$. La limite de cette fonction à l'origine n'a rien d'évident a priori, mais devient plus simple après un passage en coordonnées polaire, en utilisant la propriété précédente : $f(\rho,\theta) = \dfrac{\rho\cos(\theta) \times \rho^2\sin^2(\theta)}{\rho^2} = \rho\cos(\theta)\sin^2(\theta)$. En particulier, $|f(x,y)| \leqslant \rho = \|(x,y)\|$, ce qui prouve que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

Remarque 7. À l'aide des définitions données plus haut, on peut donner une définition plus simple mais plus technique de la limite : $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = l$ si pour tout voisinage I de l (dans $\mathbb{R}$, donc tout intervalle ouvert contenant l), il existe un voisinage V de (a,b) tel que $f(V) \subset I$. On peut en fait pousser les choses beaucoup plus loin : en définissant les ouverts de $\mathbb{R}$ de la même façon que ceux de $\mathbb{R}^2$ (voisinages de chacun de leurs points), une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est continue (partout) si et seulement si l'image réciproque de tout ouvert de $\mathbb{R}$ par f est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Théorème 1. Tout fonction à deux variables obtenue comme somme produit, quotient ou composée de fonctions continues est continue sur son ensemble de définition.

Démonstration. Comme dans le cas des fonctions à une variable, c'est très long et complètement inintéressant, nous admettons ce résultat. □

Théorème 2. Caractérisation séquentielle de la limite.
$\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = l \Leftrightarrow$ pour toutes suites de réels (x_n) et (y_n) convergeant respectivement vers a et b, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n,y_n) = l$.

Démonstration. La démonstration est la même que dans le cas de fonctions à une variable (en un peu plus technique), on admet aussi. □

Exemple : Comme dans le cas des fonctions à une variable, on se sert surtout de la contraposée de la première implication : si on peut trouver deux couples de suites (x_n, y_n) et (x'_n, y'_n) ayant les mêmes limites mais pour lesquelles $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n, y_n) \neq \lim\limits_{n\to+\infty} f(x'_n, y'_n)$, alors f ne peut pas être continue au point considéré. Ainsi, si $f(x,y) = \dfrac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, on constate aisément que $f\left(\dfrac{1}{n}, -\dfrac{1}{n}\right) = 0$ mais $f\left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{\frac{2}{n}}{\frac{\sqrt{2}}{n}} = \sqrt{2}$, ce qui empêche la fonction d'avoir une limite en l'origine.

Proposition 2. Si f est continue en un point (a,b), ses deux applications partielles sont continues respectivement en b et en a.

Démonstration. C'est évident en constatant que $|x-a| \leqslant \|(x,y)-(a,b)\|$ (et de même pour y), on peut prendre la même valeur de η pour les deux définitions de la continuité. □

Remarque 8. La réciproque de ce résultat est malheureusement fausse (on ne peut pas ramener la continuité d'une fonction à deux variables à celle de fonctions à une variable). Ainsi, la fonction f : $(x,y) \mapsto \dfrac{xy}{x^2+y^2}$, prolongée par $f(0,0)=0$, n'est pas continue en 0 (on peut utiliser la caractérisation séquentielle de la limite : $f\left(\dfrac{1}{n}, 0\right) = 0$ et $f\left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{2}$), et pourtant ses applications partielles qui sont toutes les deux nulles sont tout ce qu'il y a de plus continu.

1.4 Dérivées partielles

Définition 7. La fonction f est **dérivable en** (a,b) **dans la direction du vecteur** $h \in \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ si le taux d'accroissement $\tau(t) = \dfrac{f((a,b)+th) - f(a,b)}{t}$ admet une limite finie l quand t tend vers 0.

Exemple : Reprenons $f(x,y) = x^2+y^2$, et cherchons à déterminer certaines de ses dérivées directionnelles au point $(1,0)$. Si on pose $h = (h_x, h_y)$, on aura $\dfrac{f((1,0)+th) - f(1,0)}{t} = \dfrac{(1+th_x)^2 + t^2h_y^2 - 1}{t} = \dfrac{2th_x + t^2(h_x^2+h_y^2)}{t}$, qui a pour limite en 0 la valeur $2h_x$. Ainsi, par exemple, la dérivée suivant le vecteur $(1,0)$ vaudra 2, celle suivant le vecteur $(0,1)$ vaudra 0, et celle suivant le vecteur $(1,1)$ vaudra 2. Ces dérivées ont une interprétation géométriques proche de ce que vous connaissez sur les fonctions à une variable : elles représentent le coefficient directeur de la droite tangente à la surface représentative de f dans la direction du vecteur h (il y a en général une infinité de tangentes à une surface en un même point). Si vous préférez, il s'agit du nombre dérivé de la fonction à une variable dont la courbe est obtenue en coupant notre surface par un plan contenant l'axe (Oz) et le vecteue h. Attention à un détail un peu surprenant : la valeur de la limite dépend de la norme du vecteur h. Ainsi, en prenant $h = (2,0)$, on obtiendrait une valeur égale à 4 dans la même direction que le vecteur $(1,0)$, il faut donc prendre des vecteurs normés pour avoir une interprétation géométrique cohérente.

Définition 8. Les **dérivées partielles de** f **en** (a,b) sont ses dérivées suivant les vecteurs $(1,0)$ et $(0,1)$. On les note $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)$.

Remarque 9. Ce sont également les dérivées ordinaires des applications partielles au point (a,b). Notons que l'existence de dérivées partielles, et même l'existence de dérivées dans toutes les directions, ne suffit même pas à assurer la continuité de f en (a,b).

Définition 9. La fonction f est **de classe** $\mathcal{C}^1$ en (a,b) si f y est continue, et $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ y sont définies et continues.

Proposition 3. Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ en (a,b), elle y admet une dérivée suivant tout vecteur $h = (h_x, h_y)$, égale à $h_x \dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b) + h_y \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)$.

Démonstration. La démonstration de ce résultat nécessite le théorème fondamentale que nous allons désormais énoncer. □

Définition 10. La fonction f **admet un développement limité d'ordre** 1 **en** (a,b) si $f((a,b)+(h_x,h_y)) \underset{(x,y)\to(a,b)}{=} f(a,b) + l(h) + o(\|h\|)$, où l est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.

Remarque 10. Si cette histoire d'application linéaire vous embête, dites-vous simplement qu'on peut écrire $l(h) = \alpha h_x + \beta h_y$, où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

Théorème 3. Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ en (a,b), alors f y admet un DL_1 de la forme $f((a,b)+(h_x,h_y)) = f(a,b) + h_x \dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b) + h_y \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b) + o(\|h\|)$.

Démonstration. Ce théorème technique est admis. On peut par contre en déduire facilement la propriété précédente (il suffit d'écrire le calcul). □

Proposition 4. Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ en (a,b), elle y est continue.

Démonstration. En effet, tous les termes à part $f(a,b)$ dans le développement limité ont une limite nulle quand h tend vers $(0,0)$. □

Définition 11. On note dx l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ définie par $dx : (h_x, h_y) \mapsto h_x$. De même, dy est défini par $d_y : (h_x, h_y) \mapsto h_y$. On appelle par ailleurs **différentielle en** (a,b) **de** f l'application linéaire l de son développement limité d'ordre 1, qu'on note aussi $df_{(a,b)}$. Autrement dit, $f((a,b)+h) = f(a,b) + df_{(a,b)}(h) + o(\|h\|)$.
Avec les notations précédentes, on peut écrire que $df_{(a,b)} = \dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}dy$.

Définition 12. Le **gradient de** f **en** (a,b) est le vecteur $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b), \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right)$. On le note $\mathrm{grad}_{(a,b)}(f)$ ou encore $\nabla_{(a,b)}(f)$ (le symbole se lit **nabla**). On peut ajouter une flèche sur chacune des deux notations pour souligner le caractère vectoriel du gradient.

Proposition 5. Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ en (a,b), alors $df_{(a,b)}(h) = grad_{(a,b)}(f).h$.

Proposition 6. Cela découle immédiatement des définitions de la différentielle (et de la caractérisation à l'aide des dérivées partielles vue plus haut) et du gradient.

Théorème 4. Toute fonction obtenue comme somme, produit, quotient ou composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur son ensemble de définition.

Démonstration. Vous vous en doutez sûrement, ce théorème sera admis. Notons au passage que les formules de dérivation de sommes, produits et autres que vous connaissez bien restent valables pour les dérivées partielles de fonctions à deux variables. Seules les composées posent problème (on ne peut de toute façon pas composer deux fonctions à deux variables, mais par exemple une fonction à deux variables par une fonction à une variable, nous reparlerons de ce genre de choses un peu plus loin dans le cours). □

Définition 13. La fonction f admet un **minimum global** (respectivement **maximum global**) en (a,b) si $\forall (x,y) \in \mathcal{D}_f$, $f(x,y) \geqslant f(a,b)$ (resp. $f(x,y) \leqslant f(a,b)$).
La fonction f admet un **minimum local** (respectivement **maximum local**) en (a,b) s'il existe une boule ouverte $\mathcal{B}$ de rayon r centrée en (a,b) telle que $\forall (x,y) \in \mathcal{B}$, $f(x,y) \geqslant f(a,b)$ (resp. $f(x,y) \geqslant f(a,b)$).

Remarque 11. La définition d'extremum local que nous venons de donner exclut la possibilité d'un extremum atteint ailleurs qu'à l'intérieur d'un ouvert, vous verrez plus en détail l'an prochain les problèmes posés par cette approche.

Théorème 5. Si f admet un extremum local en (a,b), alors $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$ (ou alternativement $df_{(a,b)} = 0$).

Démonstration. La preuve est en fait très simple : si (a,b) est un extremum local pour f, alors a et b représentent des extrema locaux pour les deux applications partielles de f, donc annulent nécessairement leurs dérivées, qui coïncident justement avec les dérivées partielles de f. □

Définition 14. Un **point critique** pour la fonction f est un point (a,b) vérifiant $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$.

Remarque 12. Un point critique est donc un extremum potentiel, mais attention, la réciproque du théorème n'est pas vraie. Vous verrez l'an prochain des techniques précises pour déterminer la nature exacte d'un point critique, mais en attendant, il faudra se débrouiller avec les moyens du bord.

Exemple 1 : $f(x,y) = x^2+y^2+2x-y+1$. On cherche à déterminer les extrema de f. La fonction est bien sûr de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, et $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x+2$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y-1$. Le seul point critique est donc le point $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$, qui annule les deux dérivées partielles. Comme $f\left(-1, \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$, le plus simple pour déterminer si le point critique est un extremum global (ou même local), le plus simple est de calculer $f(x,y)+\frac{1}{4}$ et de déterminer son signe : $f(x,y)+\frac{1}{4} = x^2+2x+1+y^2-y+\frac{1}{4} = (x-1)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2 \geqslant 0$. On en déduit que $f(x,y) \geqslant f\left(-1, \frac{1}{2}\right)$, donc que le point critique correspond à un minimum local.

Exemple 2 : $f(x,y) = x^3+y^3-3xy$. On cherche là aussi les extrema. On commence là aussi par le calcul des dérivées partielles : $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3(x^2-y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3(y^2-x)$. Les points critiques vérifient donc $x^2 = y$ et $y^2 = x$. En mettant la première équation au carré, $x^4 = y^2 = x$, donc $x = 0$ ou $x = 1$ (l'équation $x^4 = x$ se factorisant sous la forme $x(x^3-1) = 0$). Si $x = 0$ alors $y = 0$, et si $x = 1$, alors $y = 1$. Les deux points critiques sont donc $(0,0)$ et $(1,1)$. En $(0,0)$, il est facile de se rendre compte qu'il ne peut pas y avoir d'extremum local puisque les applications partielles $x \mapsto x^3$ et $y \mapsto y^3$ n'en ont pas. En $(1,1)$, c'est plus compliqué, on va essayer d'utiliser la même technique que dans l'exemple précédent, en calculant $f(1+h,1+k)-f(1,1)$ et en cherchant à déterminer son signe au voisinage de $(0,0)$ (s'il y a un extremum, il ne peut être que local, puisqu'on a déjà signalé qu'il y avait une application partielle de la forme $x \mapsto x^3$ qui n'est ni majorée ni nimorée). Puisque $f(1,1) = -1$, on calcule donc $(1+h)^3+(1+k)^3-3(1+h)(1+k)+1 = 1+3h+3h^2+h^3+1+3k+3k^3+k^3-3-3h-3k-3hk+1 = (3+h)h^2+(3+k)k^2-3hk = (3+h)\left(h-\frac{3k}{2(3+h)}\right)^2+\left(3+k-\frac{9}{4(3+h)}\right)k^2 \geqslant 0$ si h et k sont suffisamment proches de 0 (pour le premier terme, il est positif dès que $h \geqslant -3$, et le deuxième également si, par exemple, h et k sont tous deux compris entre -1 et 1). Il y aura donc un minimum local en $(1,1)$.

1.5 Dérivées partielles secondes

Définition 15. Les **dérivées partielles secondes** d'une fonction f à deux variables sont (si elles sont définies) les dérivées partielles des dérivées partielles de f. On note $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(a,b)$; $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(a,b)$; $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(a,b)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(a,b)$.

Définition 16. La fonction f est **de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert** U si f, ses deux dérivées partielles et ses quatre dérivées partielles secondes sont toutes continues sur U.

Exemples : Si nous reprenons notre premier exemple $f(x,y) = x^2 + y^2$, on calcule très facilement $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y$, puis $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2$, les deux autres dérivées partielles secondes (celles qui sont appelées dérivées croisées pusiqu'elles mélangent une dérivation par rapport à x et une par rapport à y) sont nulles.

Pour un exemple un peu moins facile au niveau des calculs, prenons $g(x,y) = \frac{2xy + x - 1}{y^2+1}$. La fonction est définie sur $\mathbb{R}^2$, et on calcule dans un premier temps $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2y+1}{y^2+1}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2x(y^2+1) - 2y(2xy+x-1)}{(y^2+1)^2} = \frac{-2xy^2 - 2xy + 2x - 2y}{(y^2+1)^2}$; et dans un deuxième temps $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{2(y^2+1) - 2y(2y+1)}{(y^2+1)^2} = \frac{-2y^2 - 2y + 2}{(y^2+1)^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{-2y^2 - 2y + 2}{(y^2+1)^2}$ et enfin $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{(-4y-2)(y^2+1)^2 - 4y(y^2+1)(-2y^2-2y+2)}{(y^2+1)^4} = \frac{-4y^3 - 4y - 2y^2 - 2 + 8y^3 + 8y^2 - 8y}{(y^2+1)^3}$
$= \frac{4y^3 + 6y^2 - 12y}{(y^2+1)^3}$. On note au passage que les deux dérivées partielles croisées sont égales. Ce n'est pas un hasard.

Théorème 6. Théorème de Schwarz.
Si f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert U, alors $\forall (x,y) \in U$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$.

Démonstration. Vous commencez à avoir l'habitude, on admettra ce résultat (vraiment pas évident à démontrer d'ailleurs). □

Théorème 7. Toute fonction obtenue comme somme, produit, quotient ou composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur son ensemble de définition.

1.6 Équations aux dérivées partielles

Une équation aux dérivées partielles est en gros l'équivalent pour des fonctions à plusieurs variables (deux en ce qui nous concerne dans ce chapître, mais on peut facilement généraliser) des équations différentielles pour les fonctions à une variable. Il s'agit donc d'équations dont les inconnues sont des fonctions à deux variables, et qui font intervenir les dérivées partielles de ces fonctions. Même si le principe est le même, les équations aux dérivées partielles (EDP) forment un domaine d'étude infiniment plus vaste, varié et complexe que les équations différentielles ordinaires. Elles interviennent dans énormément de domaines, en premier lieu la physique (équations de Maxwell par exemple). Notre but n'est certainement pas ici d'initier une étude systématique et complète de ce genre d'équations, mais plus modestement de donner un tout petit exemple qui vous donnera un premier aperçu des méthodes que vous approfondirez un peu l'an prochain.

Théorème 8. Soit f une fonction à deux variables, et u et v deux fonctions (à une variable) de classe $\mathcal{C}^1$ sur un certain intervalle I. On suppose également que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $u(I) \times v(I)$, et on pose $g : t \mapsto f(u(t), v(t))$. La fonction g (qui est une fonction à une variable) est alors de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $\forall t \in I$, $g'(t) = u'(t)\frac{\partial f}{\partial x}(u(t), v(t)) + v'(t)\frac{\partial f}{\partial y}(u(t), v(t))$.

Théorème 9. Soient (u, v) deux fonctions à deux variables de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U, et f une fonction à deux variables de classe $\mathcal{C}^1$ sur $x(U) \times y(U)$, alors $g : (x,y) \mapsto f(u(x,y), v(x,y))$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et :
- $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) \times \frac{\partial f}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) \times \frac{\partial f}{\partial v}(u,v)$.

- $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) \times \dfrac{\partial f}{\partial u}(u,v) + \dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y) \times \dfrac{\partial f}{\partial v}(u,v)$.

Démonstration. Ces théorèmes ne sont pas si difficiles que ça à prouver, mais comme ce n'est pas du tout notre objectif ici, on s'en dispensera (il faut bien laisser un peu de travail pour les collègues l'an prochain). Ces résultats sont extrêmement utiles dans la mesure où énormément d'équations aux dérivées partiellespeuvent se résoudre en effectuant des changements de variables, c'est-à-dire en faisant apparaître des composées. □

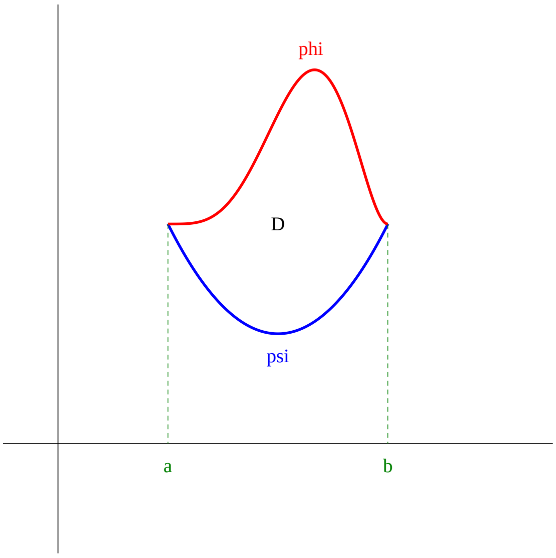
Exempple : équation des ondes $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$.
On cherche donc les fonctions à deux variables (notées x et t) vérifiant l'équation précédente. Pour cela, on va poser $u = x-t$ et $v = x+t$, et $f(x,t) = g(x-t, x+t) = g(u,v)$. En appliquant les résultats précédents, on calcule successivement $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \dfrac{\partial g}{\partial u}(u,v) + \dfrac{\partial g}{\partial v}(u,v)$ (les dérivées partielles de u et de v par rapport à x sont égales à 1), et $\dfrac{\partial f}{\partial t}(x,t) = -\dfrac{\partial g}{\partial u}(u,v) + \dfrac{\partial g}{\partial v}(u,v)$; puis (en omettant les variables pour alléger un peu les notations) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2} + \dfrac{\partial^2 g}{\partial v \partial u} + \dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \dfrac{\partial^2 g}{\partial v^2} = \dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2} + 2\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \dfrac{\partial^2 g}{\partial v^2}$ (les dérivées croisées sont égales car la fonction est nécessairement de classe $\mathcal{C}^2$), et de même $\dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2} - \dfrac{\partial^2 g}{\partial v \partial u} - \dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \dfrac{\partial^2 g}{\partial v^2} = \dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2} - 2\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \dfrac{\partial^2 g}{\partial v^2}$. En reportant dans l'équation initiale, on trouve alors que $4\dfrac{\partial g^2}{\partial u \partial v} = 0$. Vous savez résoudre l'équation différentielle $f''(x) = 0$? Ce n'est pas beaucoup plus compliqué ici, on commence par exemple par intégrer par rapport à la variable u pour obtenir $\dfrac{\partial g}{\partial v} = k(v)$. Attention ici, la primitive sera une fonction constante par rapport à la variable u mais peut très bien déprendre de v. En notant K une primitive de la fonction k (qui est une fonction de l'unique variable v), on trouve alors $g(u,v) = K(v) + l(u)$, où K et l sont sûrement des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$. Réciproquement, on vérifie aisément que toute fonction pouvant s'écrire sous la forme $K(u)+l(v)$ est solution de l'équation initiale. Autrement dit, toutes les fonctions de la forme $f(x,t) = K(x-t) + l(x+t)$ sont solution de l'équation des ondes. On remarque en particulier qu'il y a énormément plus de solutions pour une équation de ce type que pour une équation différentielle ordinaire d'ordre 2.

2 Intégrales doubles

Une intégrale double, comme vous pouvez vous en douter, est une intégrale de fonction à deux variables, qui correspond à un calcul géométrique de volume situé sous une surface représentative. Pour calculer ce genre d'intégrales doubles, que vous avez déjà du croiser en physique, il faudrait théoriquement mettre en place une théorie de l'intégration qui ressemble à celle que nous avons construite pour les fonctions à une variable, en partant du fait qu'on sait assez facilement calculer des volumes de parallélépipèdes (qui sont l'équivalent des rectangles avec une dimension supplémentaire). Mais comme c'est nettement plus compliqué que pour les intégrales simples, et que nous ne voulons de toute façon que donner un petit aperçu, nous allons faire beaucoup plus simple.

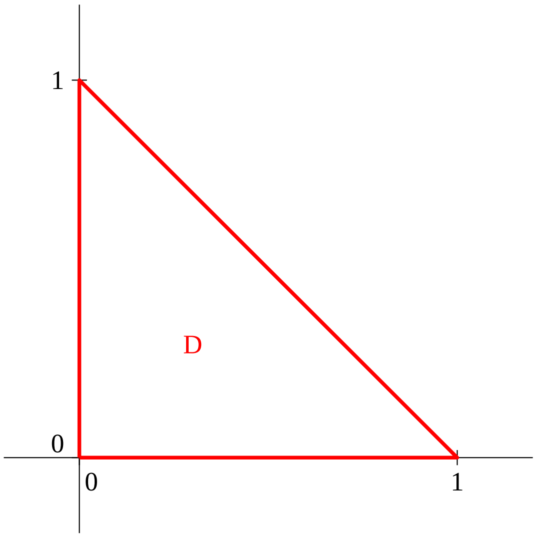
Remarque 13. Le cas le plus simple est celui où on intègre notre fonction à deux variables sur un rectangle : $\displaystyle\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\ dx\ dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\ dy \right)\ dx$.

Théorème 10. Théorème de Fubini.
Si le domaine de l'intégration double $\mathcal{D}$ est contitué de deux segments de droite verticaux situé en $x = a$ et $x = b$ (qui peuvent très bien être réduits à des points), et de deux courbes représentatives de fonction $\varphi(x)$ et $\psi(x)$, alors $\displaystyle\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\ dx\ dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\ dy \right)\ dx$.



Remarque 14. Présenté ainsi, ce théorème est bien sûr une arnaque totale, puisque le membre de gauche n'a absolument pas été défini (de fait, le théorème nous servira donc de définition). Notons quand même qu'on peut inverser le rôle des deux intégrations (suivant x et suivant y) dans la remarque précédant le théorème mais pas dans la formulation du théorème de Fubini. Par contre, on peut énoncer un résultat très similaire pour un domaine d'intégration constitué de deux segments horizontaux et de deux courbes représentatives de fonctions de la variable y.

Exemple : On veut calculer $I = \iint_{\mathcal{D}} x^2 + y \ dx \ dy$, où $\mathcal{D}$ est décrit par les inégalités $0 \leqslant x \leqslant 1$ et $0 \leqslant y \leqslant 1 - x$, qu'on peut représenter ainsi :



Le calcul est alors assez élémentaire : $I = \int_0^1 \int_0^{1-x} x^2 + y \ dy \ dx = \int_0^1 \left[x^2 y + \frac{1}{2} y^2 \right]_0^{1-x} dx = \int_0^1 x^2(1-x) + \frac{(1-x)^2}{2} \ dx = \int_0^1 -x^3 + \frac{3}{2}x^2 - x + \frac{1}{2} \ dx = \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x \right]_0^1 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

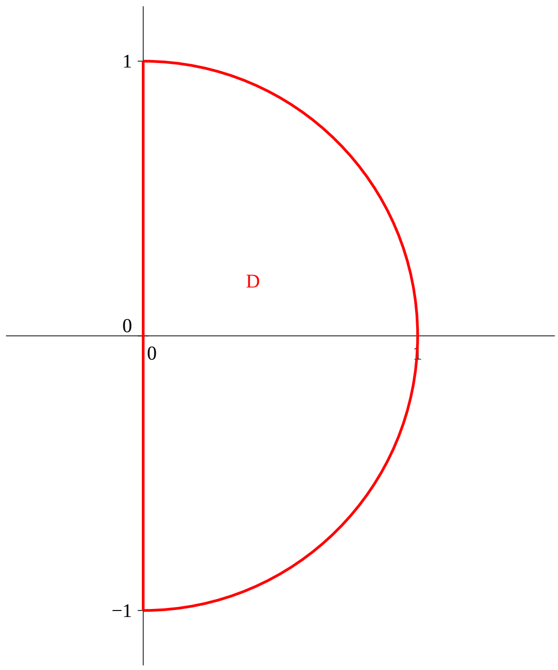
Proposition 7. L'intégration rouble est une application linéaire sur l'espace vectoriel des fonctions à deux variables continues sur un domaine $\mathcal{D}$. De plus, elle vérifie la relation de Chasles sur chacune des deux variables, et la propriété de positivité (une fonction toujours positive sur $\mathcal{D}$ a une intégrale double positive sur $\mathcal{D}$).

Démonstration. Nous n'allons rien démontrer de tout cela, contentons-nous de constater que les calculs pratiques d'intégrales doubles seront très similaires à ceux d'intégrales simples (notamment quand on veut sortir une constante de l'intégrale). □

Théorème 11. Changement de variables dans une intégrale double.
Le principe est le même que pour les intégrales simples : il faut modifier le domaine d'intégration (ce qui peut être nettement plus délicat qu'un simple changement de bornes), tout ce qui se trouve sous l'intégrale, et surtout transformer l'élément différentiel $dx\ dy$. C'est ce dernier point qui est compliqué à mettre en place. Sans énoncer un théorème général que vous verrez l'an prochain, voici deux cas particuliers utiles pour les calculs pratiques :

- Changement de variable affine $u = ax + by + \alpha$ et $v = cx + dy + \beta$. On posera alors $dx\ dy = (ad - bc)\ du\ dv$ (ce que je viens d'écrire est un abus de notation mais vous comprenez ce que ça signifie en pratique).
- Changement de variable polaire $(x, y) \mapsto (\rho, \theta)$. On posera alors $dx\ dy = \rho\ d\rho\ d\theta$.

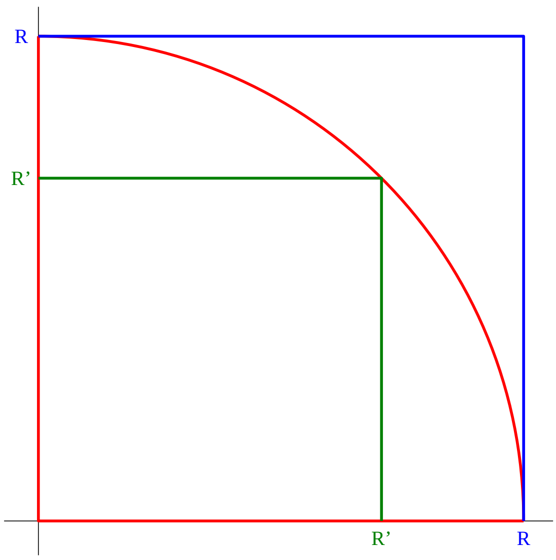
Exemple : On souhaite calculer $I = \displaystyle\iint_{\mathcal{D}} x^2 + y^2\ dx\ dy$, où $\mathcal{D}$ est le demi-disque trigonométrique situé « à droite » de l'axe des ordonnées :



Cet ensemble est plus facile à décrire en coordonnées polaires (même si en l'occurence on peut s'en sortir sans) : il est simplement décrit par les inégalités $0 \leqslant \rho \leqslant 1$ et $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{2}$. Autrement dit, en appliquant le théorème précédent (et en constatant bien évidemment que $x^2 + y^2 = \rho^2$), $I = \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \rho^2 \times \rho\ d\rho\ d\theta = \pi \int_0^1 \rho^3\ d\rho = \frac{\pi}{4}$ (comme la fonction ne dépend pas de θ, on peut directement sortir une constante égale à la largeur de l'intervalle d'intégration suivant la variable θ).

Remarque 15. Les intégrales doubles, bien qu'étant par définition des calculs de volume, peuvent être utilisées pour déterminer des aires. Il suffit pour cela d'intégrer la fonction constante égale à 1, l'aire du domaine sera alors simplement multipliée par 1 pour donner le volume calculé par l'intégrale double. Autrement dit, l'aire du domaine $\mathcal{D}$ peut être obtenue en calculant $\displaystyle\iint_{\mathcal{D}} 1 \; dx \; dy$. Une application classique de ce résultat, combiné à un changement de variables polaire, est le calcul de l'aire d'un secteur angulaire centré en O et délimité par les demi-droites $\theta = \theta_0$ et $\theta = \theta_1$, ainsi que par la courbe polaire d'équation $\rho = \rho(\theta)$. L'aire en question vaut $\displaystyle\iint_{\mathcal{D}} 1 \; dx \; dy = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \int_0^{\rho(\theta)} \rho \; d\rho \; d\theta = \frac{1}{2} \int_{\theta_0}^{\theta_1} \rho(\theta)^2 \; d\theta$.

Exemple : Calcul de l'intégrale de Gauss $\displaystyle I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \; dx$.
Je sens les protestations poindre : c'est une intégrale simple, et surtout c'est une intégrale impropre (bornes infinies) que nous ne sommes pas censés savoir calculer. Ce n'est pas bien grave, on va définir $\displaystyle I_R = \int_0^R e^{-x^2} \; dx$ et admettre que $I = 2 \lim\limits_{R \to +\infty} I_R$ (le facteur 2 venant du fait qu'on a pris une intégrale entre 0 et R plutôt qu'entre $-R$ et R en utilisant la parité de la fonction intégrée). Puisqu'il faudrait quand même faire intervenir des intégrales doubles un jour ou l'autre, posons maintenant $\displaystyle J_R = \iint_{\mathcal{D}} e^{-x^2-y^2} \; dx \; dy$, où $\mathcal{D}$ est le quart de disque de rayon R centré en O correspondant aux angles compris entre 0 et $\dfrac{\pi}{2}$ sur le disque trigonométrique. Ce quart de disque est compris entre les carrés $\left[0, \dfrac{R}{\sqrt{2}}\right]^2$ et $[0, R]^2$. Vous ne suivez plus rien ? Le petit schéma suivant devrait suffire à vous convaincre (on a noté $R' = \dfrac{R}{\sqrt{2}}$) :



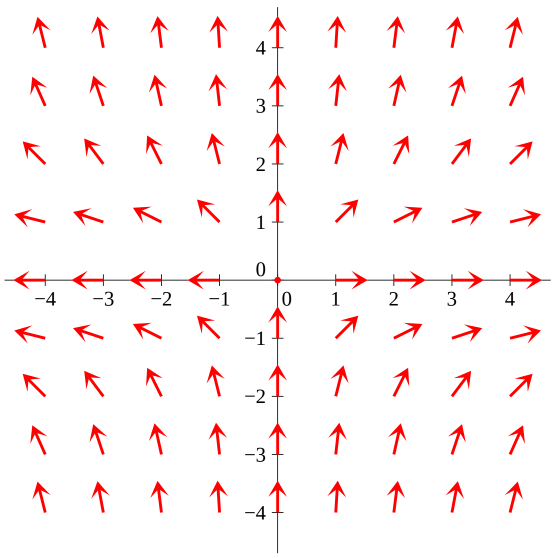
En constatant alors que $\displaystyle\iint_{[0,R]^2} e^{-x^2-y^2} \; dx \; dy = \int_0^R e^{-x^2} \; dx \times \int_0^R e^{-y^2} \; dy = I_R^2$ (et de même bien sûr sur l'autre carré), on peut en déduire que $I_{\frac{R}{\sqrt{2}}}^2 \leqslant J_R \leqslant I_R^2$. Or, l'intégrale double J_R se calcule facilement à l'aide d'un changement de variable polaire : le quart de disque est aisément décrit, et $\displaystyle J_R = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^R \rho e^{-\rho^2} \; d\rho \; d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-\frac{1}{2} e^{-\rho^2}\right]_0^R = \frac{\pi}{4}(1 - e^{-R^2})$. En particulier, $\lim\limits_{R \to +\infty} J_R = +\infty$. Via le théorème des gendarmes, on en déduit en utilisant l'encadrement obtenu plus haut que $\underset{R \to +\infty}{I}{}_R{}^2 = \dfrac{\pi}{4}$, soit $\lim_{R \to +\infty} I_R = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Conclusion : $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$.

3 Champs de vecteurs

Nous avons étudié des fonctions à une variable, c'est-à-dire de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$; à deux variables, c'est-à-dire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, reste dans ce dernier paragraphe à dire quelques mots des champs de vecteurs, c'est-à-dire des fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. Pourquoi ce nom de champ de vecteurs ? Tout simplement parce qu'une telle fonction étant fort difficile à représenter graphiquement, on utilise l'astuce suivante pour avoir une idée de son allure : on représente dans $\mathbb{R}^2$ des vecteurs dont les coordonnées sont les valeurs de la fonction en question sur certains points. C'est finalement la même approche que ce lorsqu'on essaye d'obtenir l'allure d'un graphe de fonction en situant quelques points de la courbe (sauf que là on ne reliera rien du tout ensuite).

Définition 17. Un **champ de vecteur** $\overrightarrow{F}$ est une fonction $\overrightarrow{F} : U \to \mathbb{R}^2$, où U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. On notera dans tout ce paragraphe $\overrightarrow{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$.

Exemple : Voici l'allure du champ de vecteurs $\overrightarrow{F}(x, y) = (x, y^2)$ (pour qu'il n'y ait pas chevauchement des différents vecteurs représentés, on les dessinera tous de norme $\frac{1}{2}$; autrement dit, on ne représentera en fait que la direction des vecteurs).



Définition 18. Le champ de vecteurs $(P(x, y), Q(x, y))$ **dérive d'un potentiel scalaire** V s'il existe une fonction à deux variables V de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $P(x, y) = \frac{\partial V}{\partial x}$ et $Q(x, y) = \frac{\partial V}{\partial y}$.

Remarque 16. Autrement dit, $(P(x, y), Q(x, y)) = \mathrm{grad}_{(x,y)}(V)$. On parle d'ailleurs aussi de champ de gradient pour un champ de vecteurs dérivant d'un potentiel scalaire. Le terme potentiel est issu de la physique, où les champs gravitationnel, électrique ou magnétique dérivient tous de fonctions appelées potentiel gravitationnel, électrique ou magnétique.

Théorème 12. Si $(P(x, y), Q(x, y))$ est un champ de vecteurs de classe $\mathcal{C}^1$ (c'est-à-dire que P et Q sont toutes deux de classe $\mathcal{C}^1$) sur un ouvert étoilé U, alors (P, Q) dérive d'un potentiel scalaire si et seulement si $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial x}$.

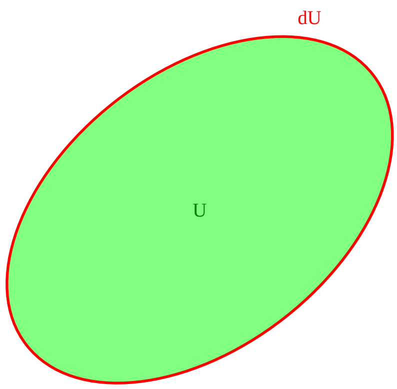
Remarque 17. Ce théorème, que nous ne démontrerons pas, présente en quelque sorte une réciproque au théorème de Schwarz sur les dérivées croisées. Le terme ouvert étoilé apparaissant dans l'énoncé n'a pas été défini : il s'agit d'un ouvert contenant un point tel que le segment reliant ce point à n'importe quel autre point de l'ouvert est inclus entièrement dans l'ouvert (je vous laisse faire une figure si ça vous amuse).

Exemple : Le champ de vecteurs défini par $P(x,y) = 2xy$ et $Q(x,y) = x^2 + y^2$ dérive d'un potentiel scalaire puisque $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 2x$. Est-on capable de déterminer le potentiel V correspondant ? Oui, il suffit de partir de la condition $\dfrac{\partial V}{\partial x} = P(x,y)$ et d'intégrer par rapport à x pour obtenir $V(x,y) = x^2y + k(y)$, où k est une fonction a priori quelconque, et de dériver cette éaglité pour l'identifier à $Q(x,y)$: $Q(x,y) = \dfrac{\partial V}{\partial y}(x,y) = x^2 + k'(y)$, donc $k'(y) = y^2$. Autrement dit, on peut choisir $V(x,y) = x^2y + \dfrac{1}{3}y^3$ (le potentiel scalaire est défini à une constante près).

Définition 19. Soit Γ une courbe plane paramétrée sur le segment $[a,b]$ par $t \mapsto (x(t), y(t))$ et (P,Q) un champ de vecteur, la **circulation du champ le long de la courbe** Γ est l'intégrale $\displaystyle\int_a^b P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t)\ dt$. On note de façon un peu abrégée cette intégrale sous la forme $\displaystyle\oint_\Gamma P\ dx + Q\ dy$.

Remarque 18. Cette notion s'interprète bien si on pense en termes physiques. Si le champ de vecteurs dérive d'un potentiel et correspond à une force exercée sur un mobile se balladant sur la courbe Γ, la circulation correspond au travail fourni par la force lors du déplacement.

Théorème 13. Formule de Green-Riemann.
Soit (P,Q) un champ de vecteur de classe $\mathcal{C}^1$ défini sur un ouvert U, dont le bord est une courbe Γ paramétrée par $t \mapsto (x(t), y(t))$, alors $\displaystyle\iint_U \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\ dx\ dy = \int_a^b P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t)\ dt$. Autrement dit, $\displaystyle\iint_U \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \oint_{\partial U} P\ dx + Q\ dy$, en notant ∂U la frontière de l'ouvert U.



Application : calcul d'aires. On a vu plus haut qu'on pouvait calculer l'aire de l'ouvert U à l'aide d'une intégrale double sur U de la fonction constante égale à 1. La formule de Green-Riemann permet de ramener ce calcul à une intégrale simple, il suffit pour cela de déterminer un champ de vecteurs pour lequel $\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = 1$. Pour cela, les solutions les plus simples sont $(P, Q) = (x, 0)$ et $(P, Q) = (0, -y)$, qui mènent aux formules suivantes : avec les mêmes notations pour le bord que dans le théorème de Green-Riemann, l'aire de l'ouvert U peut être calculée des deux façons suivantes : $\displaystyle\int_a^b x(t)y'(t)\ dt$ ou $\displaystyle -\int_a^b x'(t)y(t)\ dt$. On peut également combiner les deux (cela donne souvent des formules plus simples) et calculer l'aire par la formule $\displaystyle\frac{1}{2}\int_a^b x'(t)y(t) - x(t)y'(t)\ dt$.

Exemple : Calculons l'aire $\mathcal{A}$ intérieure à l'astroïde d'équation paramétrique $(\cos^3(t), \sin^3(t))$. On calcule aisément $x'(t) = -3\cos^2(t)\sin(t)$ et $y'(t) = 3\sin^2(t)\cos(t)$, donc $\mathcal{A} = \displaystyle\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos^3(t) \times 3\sin^2(t)\cos(t) + 3\cos^2(t)\sin(t) \times \sin^3(t)\ dt = \frac{3}{2}\int_0^{2\pi} \sin^2(t)\cos^2(t)(\cos^2(t) + \sin^2(t))\ dt$ $\displaystyle = \frac{3}{2}\int_0^{2\pi} \sin^2(t)\cos^2(t)\ dt$. Utilisons ensuite un peu de trigonométrie : comme $\cos(2t) = 2\cos^2(t) - 1$, $\cos^2(t) = \dfrac{\cos(2t) + 1}{2}$, et $\sin^2(t) = 1 - \cos^2(t) = \dfrac{1 - \cos(2t)}{2}$. On en déduit que $\mathcal{A} = \displaystyle\frac{3}{8}\int_0^{2\pi} 1 - \cos^2(2t)\ dt = \frac{3}{8}\int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos(4t)}{2}\ dt = \frac{3}{16}\left[t - \frac{1}{4}\sin(4t)\right]_0^{2\pi} = \frac{3\pi}{8}$.