Dérivation

PTSI B Lycée Eiffel

22 mars 2013

Toute littérature dérive du péché.

Charles Baudelaire

Les constantes et e^x sont dans le métro.
Un opérateur différentiel terroriste monte dans la rame,
menaçant de dériver tout le monde.
Alors que les constantes paniquent, e^x se moque de lui :
« Vas-y, dérive, je crains rien ».
L'opérateur répond alors : « Tremble, misérable exponentielle, je suis $\dfrac{d}{dy}$ » !

Introduction

Encore un court chapître d'analyse glissé entre deux gros chapîtres d'algèbre. Comme dans le chapître sur la continuité, nous revenons ici sur des notions que vous avez déjà largement abordées au lycée, et qui plus est que nous avons également revues depuis le début de l'année dans le cadre des fonctions usuelles ou des courbes planes. Pas grand chose de nouveau donc, mais des définitions rigoureuses et un formulaire entièrement démontré, ainsi que, comme dans le cas de la continuité, une section consacrée à quelques théorèmes fondamentaux.

Objectifs du chapitre :

- ne plus hésiter une seconde avant de calculer une dérivée classique (notamment à l'aide de la formule de la dérivée d'une composée).
- maîtriser l'application de l'IAF à l'étude des suites récurrentes.

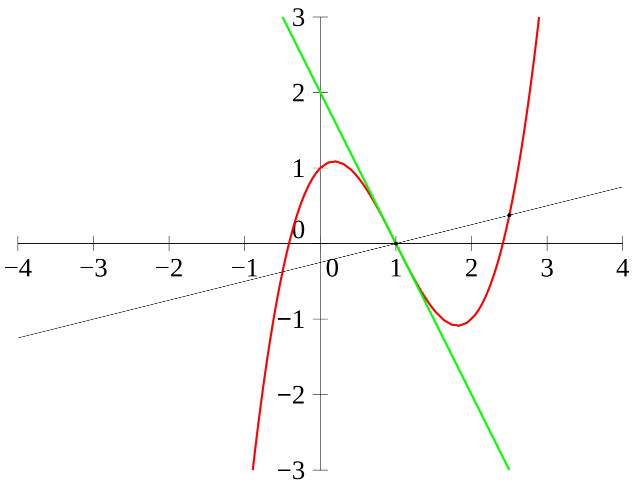
1 Définitions et formulaire

1.1 Aspect graphique

L'idée cachée derrière le calcul de dérivées, que vous utilisez déjà depuis plusieurs années pour étudier les variations de fonctions, est en gros le suivant : les seules fonctions dont le sens de variation est réellement facile à déterminer sont les fonctions affines, pour lesquelles il est simplement donné par le signe du coefficient directeur de la droite représentant la fonction affine. Pour des fonctions plus complexes, on va donc chercher à se ramener au cas d'une droite en cherchant, pour chaque point de la courbe, la droite « la plus proche » de la courbe autour de ce point. C'est ainsi qu'est née la notion de tangente, à laquelle celle de dérivée est intimement liée. Plus précisément :

Définition 1. Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$, le **taux d'accroissement de f en a** est la fonction définie par $\tau_a(h) = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

Remarque 1. Le taux d'accroissement n'est pas défini en 0. Pour $h \neq 0$, $\tau_a(h)$ représente le coefficient directeur de la droite passant par les points d'abscisse a et $a+h$ de la courbe représentative de f (droite noire dans le graphique ci-dessous, où $a = 1$ et $h = 1.5$).



Définition 2. Une fonction f est **dérivable** en a si son taux d'accroissement en a admet une limite quand h tend vers 0. On appelle alors **nombre dérivé de f en a** cette limite et on la note $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

Remarque 2. En reprenant l'interprétation géométrique précédente, la droite tracée se rapproche quand h tend vers 0 de la tangente à la courbe représentative de f au point de la courbe d'abscisse a. Le nombre dérivé de f en a est donc le coefficient directeur de cette tangente, tracée en vert sur le graphique.

Remarque 3. Pour des raisons pratiques, on aura parfois besoin pour certains calculs d'une définition légèrement différente du nombre dérivé : $f'(a) = \lim\limits_{b \to a} \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$, qui est équivalente à la précédénte (en posant $h = b - a$, on se ramène en effet à notre première définition).

Exemples :

- Considérons $f(a) = a^2$ et calculons à l'aide de cette définition la dérivée (ou plutôt pour l'instant le nombre dérivé au point d'abscisse a) de f. Le taux d'accroissement de la fonction carré en a vaut $\tau_a(h) = \dfrac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \dfrac{a^2 + 2ha + h^2 - 1}{h} = 2a + h$. Ce taux d'accroissement a une limite égale à $2a$ quand h tend vers 0, donc f est dérivable en a et $f'(a) = 2a$ (ce qui correspond bien à la formule que vous connaissez).
- Considérons à présent $g(a) = \sqrt{a}$, le taux d'accroissement de g en a vaut $\tau_a(h) = \dfrac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}{h} = \dfrac{(\sqrt{a+h} - \sqrt{a})(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})}{h(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})} = \dfrac{a+h-a}{h(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})} = \dfrac{1}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}}$. Si $a \neq 0$, ce taux d'accroissement a pour limite $\dfrac{1}{2\sqrt{a}}$, ce qui correspond une nouvelle fois à une formule bien connue. Par contre, $\lim\limits_{h \to 0} \tau_0(h) = +\infty$, ce qui prouve que la fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0. On a tout de même une interprétation graphique intéressante dans ce cas : la courbe représentative de la fonction racine carrée admet en son point d'abscisse 0 une tangente verticale.

Définition 3. La fonction f est **dérivable à gauche** en a si son taux d'accroissement admet une limite quand h tend vers 0^-. On note alors $f'_g(a) = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$. De même, f est **dérivable à droite** en a si $\tau_a(h)$ admet une limite en 0^+ et on note $f'_d(a) = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Remarque 4. La fonction f est dérivable en a si et seulement si elle y est dérivable à gauche et à droite et que $f'_d(a) = f'_g(a)$.

Définition 4. Dans le cas où $f'_g(a) \neq f'_d(a)$ (ou si une seule des deux limites existe) on dit que la courbe de f admet une (ou deux) **demi-tangente à droite ou à gauche**. Si $\tau_a(h)$ admet une limite infinie en 0^+ ou en 0^-, on dit que la courbe de f admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse a.

Exemple : Considérons $f(x) = |x|$ et $a = 0$. On a donc $\tau_0(h) = \dfrac{|h|}{h}$. Si $h > 0$, $\tau_0(h) = \dfrac{h}{h} = 1$, donc $f'd(0) = 1$; mais si $h < 0$, $\tau_0(h) = \dfrac{-h}{h} = -1$, donc $f'g(h) = -1$. La fonction valeur absolue n'est donc pas dérivable en 0, mais y admet à gauche une demi-tangente d'équation $y = -x$, et à droite une demi-tangente d'équation $y = x$ (qui sont d'ailleurs confondues avec la courbe).

Définition 5. Une fonction f est **dérivable sur un intervalle** I si elle est dérivable en tout point de I. On appelle alors **fonction dérivée** de f la fonction $f : x \mapsto f'(x)$.

Proposition 1. Soit f une fonction dérivable en a, alors l'équation de la tangente à la courbe représentative de f en a est $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

Proposition 2. Si une fonction f est dérivable en a, alors f est continue en a.

Remarque 5. La réciproque est fausse ! Par exemple la fonction valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$ mais pas dérivable en 0.

Démonstration. Si f est dérivable en a, on sait que $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$. Autrement dit, $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} \underset{0}{=} f'(a)+o(1)$. En multipliant tout par h, on obtient $f(a+h)-f(a) = hf'(a)+o(h)$. Comme $\lim\limits_{h\to 0} f(a) + hf'(a) + o(h) = f(a)$, on a donc $\lim\limits_{h\to 0} f(a+h) = f(a)$, ce qui prouve que f est continue en a. □

Définition 6. On appelle **développement limité à l'ordre** 1 de f en a l'égalité $f(a+h) \underset{0}{=} f(a) + hf'(a) + o(h)$.

Remarque 6. Cette égalité signifie simplement que, lorsque h est proche de 0, $f(a+h)$ peut être approché par $f(a) + hf'(a)$, qui n'est autre que la valeur prise par la tangente au point d'abscisse $a+h$. On parle d'ordre 1 car on approche f par une fonction qui est un polynome de degré 1. On peut généraliser cette notion en approchant la fonction f par un polynome de degré 2, 3 ou plus (mais il faut alors que f soit deux, trois fois dérivable, etc). On parle alors de développement limité à l'ordre 2, 3, nous reviendrons largement sur ce concept dans un chapître ultérieur.

1.2 Opérations

Proposition 3. Soient f et g deux fonctions dérivables en x. Alors $f+g$ est dérivable en x et $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.

Démonstration. En effet, le taux d'accroissement de $f+g$ en x vaut
$\tau_x(h) = \dfrac{f(x+h)+g(x+h)-f(x)-g(x)}{h} = \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} + \dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}$. Autrement dit, c'est la somme des taux d'accroissements de f et de g en x. Sa limite existe donc et est égale à la somme des limites de ces taux d'accroissement, c'est-à-dire que $\lim\limits_{h\to 0} \tau_x(h) = f'(x) + g'(x)$, d'où la formule. □

Proposition 4. Soient f et g deux fonctions dérivables en x, alors fg est dérivable en x et $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.

Démonstration. Calculons le taux d'accroissement de la fonction fg en x :
$\tau_x(h) = \dfrac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} = \dfrac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} = g(x+h)\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} + f(x)\dfrac{g(x+h) - g(x)}{h}$. Le premier terme a pour limite $g(x)f'(x)$ quand h tend vers 0 (la fonction g étant dérivable donc continue, $g(x+h)$ tend vers $g(x)$ et le reste est le taux d'accroissement de f en x), et le second a pour limite $f(x)g'(x)$ puisqu'on reconnait le taux d'accroissement de g. On obtient donc bien la formule attendue. □

Proposition 5. Soit g une fonction dérivable en x, et ne s'annulant pas en x, alors $\dfrac{1}{g}$ est dérivable en x et $\left(\dfrac{1}{g}\right)'(x) = -\dfrac{g'(x)}{g(x)^2}$. Si f est une autre fonction dérivable en x, alors $\dfrac{f}{g}$ est dérivable en x et $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$.

Démonstration. Le taux d'accroissement de $\dfrac{1}{g}$ en x vaut $\tau_a(x) = \dfrac{\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}}{h}$. Il n'est défini que si $g(x+h) \neq 0$, mais on admettra que, si $g(x) \neq 0$ (c'est une des hypothèses de la proposition) et g est continue, alors g ne s'annule pas au voisinage de x. On peut alors réduire au même dénominateur : $\tau_x(h) = \dfrac{1}{g(x+h)g(x)} \dfrac{g(x) - g(x+h)}{h}$. On reconnait à droite l'opposé du taux d'accroissement de g, qui tend donc vers $-g'(a)$, et le dénominateur à gauche tend vers $g(x)^2$ car g est dérivable donc continue en a.
La deuxième formule s'obtient en appliquant simplement la formule de dérivation d'un produit à f et $\dfrac{1}{g}$: $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = f'(x) \times \dfrac{1}{g(x)} - f(x) \times \dfrac{g'(x)}{g(x)^2} = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$. □

Proposition 6. Soient f et g deux fonction dérivables respectivement en x et en $f(x)$, alors la composée $g \circ f$ est dérivable en x et $(g \circ f)'(x) = f'(x).(g'(f(x))$.

Démonstration. L'idée est de séparer le taux d'accroissement de $g \circ f$ pour faire apparaitre ceux de g et de f de la façon suivante : $\dfrac{g \circ f(y) - g \circ f(x)}{y - x} = \dfrac{g \circ f(y) - g \circ f(x)}{f(y) - f(x)} \times \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x}$. Le premier quotient est le taux d'accroissement de g en $f(x)$, il converge donc vers $g'(f(x))$. Le second est le taux d'accroissement de f en x, qui converge vers x. On en déduit la formule.
Il y a en fait un (gros) problème, c'est que le premier dénominateur à droite peut très bien s'annuler (quand $f(y) = f(x)$) et (contrairement à ce qui se passait pour l'inverse) cela peut se produire aussi près de x que voulu. Une autre façon (correcte, celle-ci) de prouver cette propriété est de passer par les développements limités à l'ordre 1. On sait que $f(x+h) \underset{0}{=} f(x) + hf'(x) + o(h)$, et que $g(y+k) \underset{0}{=} g(y) + kg'(y) + o(k)$. On en déduit que $g \circ f(x+h) = g(f(x) + hf'(x) + o(h))$. En prenant $y = f(x)$ et $k = hf'(x) + o(h)$ (ce qui tend bien vers 0 quand h tend vers 0), on a donc $g \circ f(x+h) = g(f(x)) + (hf'(x) + o(h))g'(f(x)) + o(hf'(x) + o(h)) = g \circ f(x) + hf'(x)g' \circ f(x) + o(h)$ (tout les termes restants sont effectivement négligeables devant h). Comme on sait par ailleurs que $g \circ f(x+h) = g \circ f(x) + h(g \circ f)'(x) + o(h)$, une simple identification donne $(g \circ f)'(x) = f'(x)g' \circ f(x)$. □

Proposition 7. Soit f une fonction dérivable et bijective sur un intervalle I, à valeurs dans J. Alors f^{-1} est dérivable en tout point $y \in J$ tel que $f'(f^{-1}(y)) \neq 0$, et dans ce cas $(f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))}$.

Remarque 7. Les images des valeurs où la dérivée de f s'annule, qui sont donc les points où la fonction réciproque n'est pas dérivable, correspondent en fait à des endroits où la courbe de f^{-1} admet des tangentes verticales (ce qui se comprend graphiquement puisqu'une tangente horizontale pour f devient après symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$ une tangente verticale pour f^{-1}).

Démonstration. Soit $y \in J$ et $x = f^{-1}(y)$. La taux d'accroissement de f^{-1} en y est $\tau_y(h) = \dfrac{f^{-1}(y+h) - f^{-1}(y)}{h} = \dfrac{f^{-1}(y+h) - x}{h}$. La fonction f étant bijective de I sur J, $y + h$ admet un unique antécédent b sur I. On a donc $f(b) = y + h$ et par ailleurs $f(x) = y$, donc $h = (y + h) - y = f(b) - f(x)$ et $\tau_y(h) = \dfrac{b - x}{f(b) - f(x)}$. En posant $h' = b - x$, on a $\tau_y(h) = \dfrac{h'}{f(x + h') - f(x)}$, avec h' qui tend vers 0 quand h tend vers 0 car la fonction f^{-1} est continue, donc $b = f^{-1}(y + h)$ tend vers $f^{-1}(y) = x$. On reconnait donc la limite quand h tend vers 0 de l'inverse du taux d'accroissement de f en x. Si $f'(x) \neq 0$, on a donc $\lim\limits_{h \to 0} \tau_y(h) = \dfrac{1}{f'(x)} = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))}$. Si $f'(x) = 0$, la limite de $\tau_y(h)$ est infinie, on a donc une tangente verticale. □

1.3 Dérivées de fonctions usuelles

Nous ne reviendrons sur ce sujet déjà abordé en début d'année. Rappelons simplement qu'une bonne maîtrise de la formule de dérivation d'une réciproque permet de retrouver très rapidement les dérivées des fonctions trigonométriques et hyperboliques réciproques. Naturellement, toutes ces dérivées classiques sont à connaître sur le bout des doigts et peuvent être invoquées sans justification dans les exercices. Dernière chose à ne pas oublier : la plupart des fonction usuelles sont dérivables sur leur ensemble de définition, aux exceptions suivantes près :

- la fonction valeur absolue en 0.
- la fonction racine carrée en 0.
- les fonctions arccos et arcsin en -1 et en 1.
- la fonction Argch en 1.

À l'exception de la valeur absolue, tous les exemples cités donnent des tangentes verticales qui correspondent à des tangentes horizontales de la fonction réciproque.

2 Dérivées successives ; convexité

Cette partie du cours a déjà été traitée dans le chapître sur les courbes planes, nous ne reviendrons pas dessus. Elle a toutefois sa place naturelle au sein de ce chapître.

3 Théroème des accroissements finis et applications

Proposition 8. Soit f une fonction dérivable sur un segment $[a; b]$ et $x \in]a; b[$. Si x est un point en lequel f atteint un extremum local, alors $f'(x) = 0$.

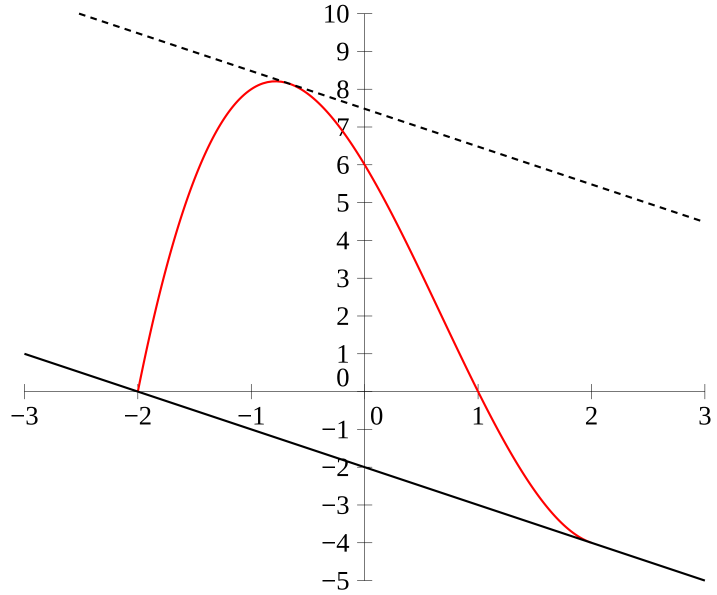
Démonstration. Supposons par exemple qu'il s'agisse d'un maximum (l'autre cas est très similaire). Le taux d'accroissement de f en x vaut $\tau_x(h) = \dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$. On a au voisinage de x, $f(x+h) \leqslant f(x)$ puisque $f(x)$ est un maximum local. On en déduit que $\forall h < 0$ (et tel que $x + h$ appartienne au voisinage en question), $\tau_x(h) \geqslant 0$, donc $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0^-} \tau_x(h) \geqslant 0$. Mais de même $\forall h > 0$, $\tau_x(h) \leqslant 0$, donc $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0^-} \tau_x(h) \leqslant 0$. Finalement, on a nécessairement $f'(x) = 0$. □

Théorème 1. Théorème de Rolle.
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $[a; b]$, et telle que $f(a) = f(b)$, alors $\exists c \in]a; b[$, $f'(c) = 0$.

Démonstration. Commençons par éliminer le cas où la fonction f est constante sur $[a;b]$ puisque dans ce cas la dérivée de f est nulle, donc le théorème est manifestement vérifié.
La fonction f étant dérivable, elle est continue sur $[a;b]$, donc y atteint un maximum M et un minimum m. Si on suppose f non constante, l'un des deux, par exemple M (dans l'autre cas, la démonstration est similaire), est distinct de $f(a) = f(b)$, donc atteint en un réel $c \in]a;b[$. D'après la propriété précédente, $f'(c) = 0$. □

Théorème 2. Théorème des accroissements finis.
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $[a;b]$, alors $\exists c \in]a;b[$, $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Remarque 8. Autrement dit, il existe un point où la tangente est parallèle à la droite passant par les points $(a;f(a))$ et $(b;f(b))$.



Démonstration. Le principe est de se ramener au théorème précédent. Définissons une deuxième fonction g par $g(x) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}x - f(x)$ (ce qui correspond à l'écart entre la courbe représentative de f et la droite passant par les points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$, à une constante près). Cette fonction est dérivable sur $[a;b]$ puisque f l'est et vérifie $g(b)-g(a) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}b - f(b) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}a + f(a) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a) - f(b) + f(a) = 0$, c'est-à-dire que $g(b) = g(a)$. on peut donc appliquer le théorème de Rolle à la fonction g : $\exists c \in]a;b[$, $g'(c) = 0$. Or, $g'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} - f'(c)$, donc on a $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$, ce qu'on cherchait à prouver. □

Remarque 9. Ce théorème un peu étrange sert très peu en tant que tel, mais ses applications fondamentales en font un des piliers de l'analyse mathématique. C'est notamment à l'aide du théorème des accroissements finis qu'on démontre le lien entre signe de la dérivée et variations d'une fonction, ce que nous allons faire tout de suite.

Théorème 3. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, alors f est croissante sur I si et seulement si f' est positive sur I, et f est décroissante sur I si et seulement si f' est négative sur I.

Démonstration. Supposons f croissante sur I, et soit $a \in I$, considérons le taux d'accroissement de f en a : $\tau_a(h) = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$. Ce taux d'accroissement est toujours positif, puisque numérateur et dénominateur sont négatifs quand h est négatif, et positifs sinon ; donc par passage à la limite $f'(a) \geqslant 0$. Réciproquement, si $f'(x) \geqslant 0$ sur I, on a d'après le théorème des accroissements finis, si $x < y$, $\dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(c) \geqslant 0$, donc $f(y) - f(x) \geqslant 0$, ce qui prouve que f est croissante sur I. La preuve dans le cas de la décroissance est très similaire. □

Théorème 4. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, alors si f' est strictement positive sur I, sauf éventuellement en un nombre fini de points où elle s'annule, la fonction f est strictement croissante sur I. De même, si f' est strictement négative sur I, sauf éventuellement en un nombre fini de points où elle s'annule, f est strictement décroissante sur I.

Ce deuxième résultat, plus subtil que le précédent, ne sera pas prouvé. Remarquons qu'il n'y a ici qu'une seule implication, une fonction peut être strictement monotone mais avoir une dérivée qui s'annule une infinité de fois (la condition exacte pour l'équivalente est trop technique pour pouvoir être mentionnée).

Remarque 10. Ces théorèmes seront bien entendus utilisés sans être cités lors de l'étude des variations de fonctions, comme vous en avez déjà l'habitude. Mais vous avez désormais une preuve complète de ces résultats très classiques.

Théorème 5. Théorème du prolongement $\mathcal{C}^1$.
Soit f une fonction continue sur un segment $[a;b]$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a;b]$. Si la dérivée f' de la fonction f admet une limite finie l en a, alors f est dérivable en a et $f'(a) = l$.

Démonstration. Considérons le taux d'accroissement de f en a : $\tau_a(h) = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$. D'après le thorème des accroissement finis, on peut écrire $\tau_a(h) = f'(c_h)$, où c_h est une constante (dépendant de h) appartenant à l'intervalle $]a; a+h[$. Si on fait tendre h vers 0, d'après le théorème des gendarmes, c_h aura pour limite a. Alors, les hypothèses du théorème nous permettent d'affirmer que $\lim\limits_{h \to 0} f'(c_h) = l$, ce qui prouve bien que la fonction f est dérivable en a, puisque son taux d'accroissement y tend vers l. □

Exemple : Ce théorème sera souvent appliqué dans le cas où on prolonge une fonction par continuité, pour déterminer si le prolongement effectué est dérivable ou non. Il évite de revenir au calcul du taux d'accroissement (qui est toutefois rarement plus complexe). Considérons la fonction $f : x \mapsto x^2 \ln(x)$. Cette fonction est définie et $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et peut se prolonger par continuité en posant $f(0) = 0$ (par croissance comparée). Par ailleurs, $f'(x) = 2x\ln(x) + x$ a certainement aussi une limite nulle en 0. Le théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$ permet alors d'affirmer que la fonction prolongée est dérivable en 0, et que $f'(0) = 0$. Cette information est essentielle pour tracer une allure précise de la courbe au voisinage de 0.

Remarque 11. On pourra également utiliser la variante suivante du théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$: sous les mêmes hypothèses, si la dérivée f' admet en a une limite infinie, alors f n'est pas dérivable en a mais y admet une tangente verticale.

Proposition 9. Inégalité des accroissements finis (IAF).
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $[a;b]$, et telle que $\forall x \in [a;b]$, $|f'(x)| \leqslant k$ (où $k \in \mathbb{R}$), alors $\forall (y,z) \in [a;b]^2$, $|f(z) - f(y)| \leqslant k|z - y|$.

Démonstration. En effet, on peut écrire $\left|\dfrac{f(z) - f(y)}{z - y}\right| = |f'(c)| \leqslant k$, ce donc découle immédiatement l'inégalité. □

Remarque 12. On peut donner une version légèrement différente de l'IAF, utilisant un encadrement de la dérivée et non une majoration de sa valeur absolue : soit f une fonction dérivable sur un intervalle $[a;b]$, et telle que $\forall x \in [a;b]$, $m \leqslant f'(x) \leqslant M$ (où $(m,M) \in \mathbb{R}^2$), alors $\forall (y,z) \in [a;b]^2$ tels que $y < z$, $m(z-y) \leqslant f(z) - f(y) \leqslant M(z-y)$.

Remarque 13. Ces inégalités ont une interprétation cinématique assez évidente : si on court par exemple deux heures avec une vitesse de pointe de 12 kilomètres par heure, on n'aura sûrement pas parcouru plus de 24 kilomètres.

Application à l'étude de suites récurrentes.
L'IAF permet de prouver la convergence de suites récurrentes sans passer par le théorème de converge monotone, ce qui peut être très pratique dans les cas où la fonction f n'est pas croissante (il n'y a alors pas besoin de séparer l'étude des sous-suites (u_{2n}) et (u_{2n+1})). Elle donne de plus des informations sur la distance entre u_n et la limite de la suite.
Prenons par exemple la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{3u_n + 2}$. Posons alors $f(x) = \dfrac{1}{3x+2}$. La fonction f est évidemment dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$, de dérivée $f'(x) = \dfrac{-3}{(3x+2)^2}$. La fonction est donc décroissante sur $]-\infty; -2|$ et sur $]-2; +\infty[$. Cherchons les points fixes de f, $f(x) = x \Leftrightarrow 1 = 3x^2 + 2x$. Ce trinôme a pour discriminant $\Delta = 4 + 12 = 16$, et admet deux racines réelles $x_1 = \dfrac{-2-4}{6} = -1$, et $x_2 = \dfrac{-2+4}{6} = \dfrac{1}{3}$. L'intervalle $[0; +\infty[$ est stable par la fonction, on prouve donc par une récurrente immédiate que tous les termes de la suite sont positifs. Sur cet intervalle, on peut majorer la dérivée (ou du moins sa valeur absolue) : si $x \geqslant 0$, $3x + 2 \geqslant 2$, donc $\dfrac{3}{(3x+2)^2} \leqslant \dfrac{3}{4}$. On peut alors appliquer l'IAF en prenant $z = u_n$ et $y = \dfrac{1}{3}$ (on choisira toujours le terme général de la suite et le point fixe qui sera la limite pour appliquer l'IAF dans ce genre de cas). On obtient, puisque $|f'|$ est majorée par $\dfrac{3}{4}$, $\left|f(u_n) - f\left(\dfrac{1}{3}\right)\right| \leqslant \dfrac{3}{4}\left|u_n - \dfrac{1}{3}\right|$, soit $\left|u_{n+1} - \dfrac{1}{3}\right| \leqslant \dfrac{3}{4}\left|u_n - \dfrac{1}{3}\right|$.

Les dernières étapes sont alors toujours les mêmes : on prouve par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left|u_n - \dfrac{1}{3}\right| \leqslant \left(\dfrac{3}{4}\right)^n \times \dfrac{1}{3}$. En effet, au rang 0, $\left|u_0 - \dfrac{1}{3}\right| = \dfrac{1}{3}$; et en supposant la propriété vraie au rang n, on peut écrire $\left|u_{n+1} - \dfrac{1}{3}\right| \leqslant \dfrac{3}{4}\left|u_n - \dfrac{1}{3}\right| \leqslant \dfrac{3}{4} \times \left(\dfrac{3}{4}\right)^n \times \dfrac{1}{3} = \left(\dfrac{3}{4}\right)^{n+1} \times \dfrac{1}{3}$ en appliquant successivement l'IAF puis l'hypothèse de récurrence. Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{3}{4}\right)^n = 0$, et comme $\left|u_n - \dfrac{1}{3}\right| \geqslant 0$, le théorème des gendarmes assure que $\lim\limits_{n \to +\infty} \left|u_n - \dfrac{1}{3}\right| = 0$, c'est-à-dire que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \dfrac{1}{3}$.