

Courbes planes

PTSI B Lycée Eiffel

16 novembre 2012

Qu'est-ce qu'une vie humaine ? La courbe d'un projectile.

Anatole FRANCE

*Le progrès fait les routes droites, mais celles qui se recourbent,
sans progrès, sont les routes du génie.*

William BLAKE (pour garder un lien avec le cinéma).

Introduction

Le but de ce chapitre est de compléter notre panel d'outils disponibles pour tracer des courbes dans le plan définies par des équations fonctionnelles. Nous savons déjà plus ou moins tracer les courbes représentatives de fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , nous apprendrons à faire mieux. Mais surtout, nous apprendrons à étudier les représentations graphiques d'arcs paramétrés, qui correspondent au parcours d'une trajectoire plane d'un mobile évoluant au cours du temps, ou si on préfère à la projection plane de courbes de fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$. Ce type de courbe est évidemment beaucoup plus varié que celles obtenues avec des fonctions usuelles.

Objectifs du chapitre :

- maîtrise de l'étude des branches infinies d'une fonction à valeurs dans \mathbb{R} ou dans \mathbb{R}^2
- capacité à tracer rapidement l'allure d'un arc paramétré ou d'une courbe définie par une équation polaire

1 Compléments sur les fonctions réelles

1.1 Convexité

Définition 1. Une fonction est **de classe** \mathcal{D}^k sur un intervalle I si elle est k fois dérivable sur I . Elle est **de classe** \mathcal{C}^k sur I si de plus sa dérivée k -ème $f^{(k)}$ est continue sur I .

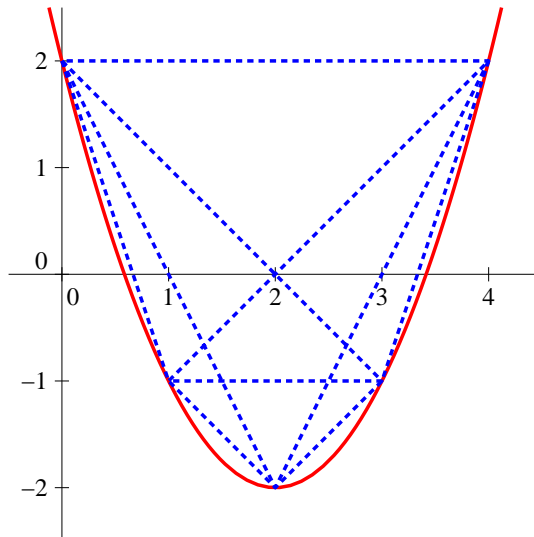
Remarque 1. Une fonction \mathcal{D}^k sur I est forcément \mathcal{C}^{k-1} sur I puisqu'une fonction dérivable est nécessairement continue. Une fonction \mathcal{C}^k est bien entendu \mathcal{D}^k . On a donc les implications suivantes : $\mathcal{C}^k \Rightarrow \mathcal{D}^k \Rightarrow \mathcal{C}^{k-1} \Rightarrow \mathcal{D}^{k-1} \Rightarrow \dots \Rightarrow \mathcal{C}^1 \Rightarrow \mathcal{D}^1 \Rightarrow \mathcal{C}^0$ (cette dernière catégorie contenant simplement les fonctions continues).

Définition 2. Une fonction est **de classe** \mathcal{C}^∞ sur un intervalle I si elle y est dérivable k fois pour tout entier k .

Remarque 2. Toutes ses dérivées sont alors continues (puisqu'on peut toujours dériver une fois de plus), ce qui justifie qu'on ne distingue pas \mathcal{D}^∞ et \mathcal{C}^∞ .

Définition 3. Une fonction f définie est **convexe** sur I si $\forall (x, y) \in I^2, \forall t \in [0; 1], f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$. La fonction f est **concave** sur I si $\forall (x, y) \in I^2, \forall t \in [0; 1], f(tx + (1-t)y) \geq tf(x) + (1-t)f(y)$.

Remarque 3. En fait, lorsque $t \in [0; 1]$, $tx + (1-t)y$ prend toutes les valeurs comprises entre x et y . De même $tf(x) + (1-t)f(y)$ prend toutes les valeurs comprises entre $f(x)$ et $f(y)$. L'inégalité de la définition signifie que tout point de la courbe situé entre les abscisses x et y est en-dessous (ou au-dessus dans le cas de la concavité) du point situé à la même abscisse sur la droite rejoignant les points $(x, f(x))$ et $(y, f(y))$. Autrement dit, la courbe d'une fonction convexe est située en-dessous de toutes ses cordes. Celle d'une fonction concave est située au-dessus de ses cordes. Voici une illustration dans le cas convexe -quelques cordes en pointillés bleus) :



Exemples : Parmi les fonctions usuelles,

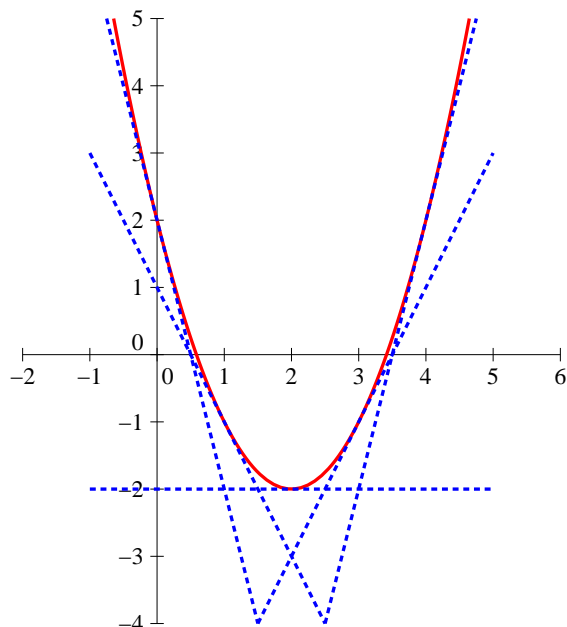
- Les fonctions $x \mapsto e^x$, $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto \cosh(x)$ sont convexes sur \mathbb{R} .
- Les fonctions $x \mapsto \ln(x)$, $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto \text{Argch}(x)$
- Les fonctions $x \mapsto x^3$, $x \mapsto \sinh(x)$, $x \mapsto \text{Argth}(x)$ sont concaves sur \mathbb{R}^- et convexes sur \mathbb{R}^+ .
- Les fonctions $x \mapsto \sqrt[3]{x}$, $x \mapsto \text{Argsh}(x)$, $x \mapsto \tanh(x)$ sont convexes sur \mathbb{R}^- , concaves sur \mathbb{R}^+ .

Proposition 1. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I , alors f est convexe sur I si et seulement si son taux d'accroissement en tout point de I est une fonction croissante de h .

Démonstration. Supposons la fonction convexe sur I , et $a \in I$. Soient $0 < h < h'$ (les autres cas sont similaires), on a alors $a + h = ta + (1-t)(a + h')$ pour un certain $t \in [0; 1]$, donc $f(a + h) \leq tf(a) + (1-t)f(a + h')$, d'où $f(a + h) - f(a) \leq tf(a) + (1-t)f(a + h') - f(a)$, soit $f(a + h) - f(a) \leq (1-t)(f(a + h') - f(a))$. Or, par définition, $(1-t)a + h = (1-t)(a + h')$, donc $1-t = \frac{h}{a + h' - a} = \frac{h}{h'}$. On

obtient alors l'inégalité $f(a + h) - f(a) \leq \frac{h(f(a + h') - f(a))}{h'}$, soit en divisant par h , $\tau_a(h) \leq \tau_a(h')$, donc le taux d'accroissement en a est bien une fonction croissante. La réciproque se montre en utilisant le même type de calcul. \square

Remarque 4. Cette caractérisation peut s'interpréter géométriquement : une fonction dérivable est convexe si sa courbe représentative est située au-dessus de chacune de ses tangentes, elle est concave si sa courbe est située en-dessous de ses tangentes. Le même exemple que ci-dessus, avec cette fois-ci quelques tangentes en pointillés :



Proposition 2. Une fonction dérivable sur un intervalle I est convexe si et seulement si sa dérivée sur I est une fonction croissante. Elle est concave si et seulement si sa dérivée est décroissante sur I .

Démonstration. En effet, soient x et y deux réels appartenant à I . Posons $h = y - x$, on a $\tau_x(h) = \frac{f(y) - f(x)}{h} \geq f'(x)$ d'après la proposition précédente ; par ailleurs, $\tau_y(-h) = \frac{f(x) - f(y)}{-h} \leq f'(y)$. En combinant les deux inégalités, on obtient $f'(x) \leq f'(y)$. \square

Proposition 3. Soit f une fonction \mathcal{D}^2 sur un intervalle I , alors f est convexe si et seulement si f'' est positive sur I . De même, f est concave sur f si et seulement si f'' est négative sur I .

Définition 4. Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^2 sur un intervalle I , un **point d'inflexion** pour f est un réel pour lequel f'' change de signe.

Remarque 5. On a en particulier $f''(x) = 0$ en tout point d'inflexion, et c'est naturellement ainsi que l'on détermine les points d'inflexion. Il arrive toutefois qu'un réel vérifiant $f''(x) = 0$ ne soit pas point d'inflexion, tout comme un réel vérifiant $f'(x) = 0$ ne correspond pas toujours à un extremum.

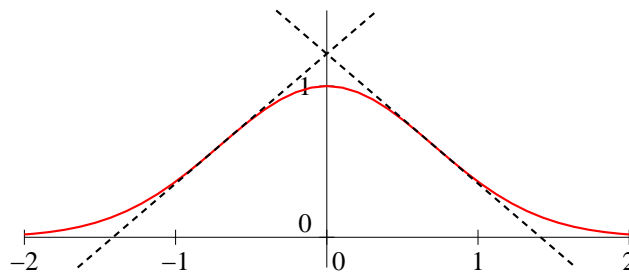
Remarque 6. La fonction f change donc de concavité en chaque point d'inflexion. Une autre façon de voir les choses est que la tangente au point d'inflexion traverse la courbe représentative de f , particularité rare qui explique que le calcul des points d'inflexion améliore la précision du tracé de courbe. On tracera systématiquement les tangentes aux points d'inflexion à chaque fois que l'on étudiera la convexité d'une fonction.

Exemple : On cherche à tracer une courbe représentative la plus précise possible de la fonction $f : x \mapsto e^{-x^2}$. La fonction f est définie et \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} . Elle a des limites nulles en $\pm\infty$. Sa dérivée est $f'(x) = -2xe^{-x^2}$, donc f est croissante sur $] -\infty; 0]$ et décroissante sur $[0; +\infty[$, admettant un maximum en 0 de valeur $f(0) = 1$. De plus, sa dérivée seconde est $f''(x) = (-2 + 4x^2)e^{-x^2}$. Elle s'annule lorsque $x^2 = \frac{1}{2}$, la fonction f a donc deux points d'inflexion en $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et en $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. On

calcule $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$, et $f'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}} = -\sqrt{\frac{2}{e}}$ et $f'\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{\frac{2}{e}}$.
 On peut alors compléter le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$+\infty$						
$f'(x)$		$+$	$\sqrt{\frac{2}{e}}$	$+$	0	$-$	$\sqrt{\frac{2}{e}}$	$-$			
f			0	\nearrow	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	\nearrow	1	\searrow	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	\searrow	0
$f''(x)$		$+$	0	$-$	$-$	0	$+$				
f		convexe		concave			convexe				

La courbe représentative de f ressemble à ceci (les tangentes aux points d'inflexion sont en pontillés) :



1.2 Branches infinies

Définition 5. La courbe représentative d'une fonction f admet en $+\infty$ une **branche parabolique de direction** (Ox) si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \pm\infty$, mais $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ (on a une définition similaire en $-\infty$).

Exemples : Les fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ ou $x \mapsto \ln x$ admettent une branche parabolique de direction (Ox) .

Définition 6. La courbe représentative d'une fonction f admet en $+\infty$ une **branche parabolique de direction** (Oy) si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \pm\infty$, et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$ (on a une définition similaire en $-\infty$).

Exemple : La fonction $x \mapsto x^2$ admet une branche parabolique de direction (Oy) (d'où le nom de branche parabolique, d'ailleurs), ainsi que la fonction $x \mapsto e^x$ en $+\infty$.

Définition 7. La courbe représentative d'une fonction f admet en $+\infty$ une **branche parabolique de direction la droite d'équation** $y = ax$ ($a \neq 0$) si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \pm\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a$, mais $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) = \pm\infty$ (on a une définition similaire en $-\infty$).

Remarque 7. Comme dans le cas des autres branches paraboliques, cela signifie que la courbe a une direction qui se rapproche de celle de la droite considérée, mais sans avoir d'asymptote oblique (autrement dit, la courbe s'éloigne de plus en plus de la droite d'équation $y = ax$, tout en ayant une direction qui se rapproche de celle de la droite).

Exemple : La fonction $f(x) = x + \ln x$ a une branche parabolique de direction la droite d'équation $y = x$ en $+\infty$.

Méthode : Plan d'étude des branches infinies.

Quand on cherche à étudier les branches infinies d'une fonction, on procède dans l'ordre suivant :

- On calcule la limite de f . Si elle est finie, on a une asymptote horizontale, si elle est infinie on continue.
- On calcule la limite de $\frac{f(x)}{x}$. Si elle est nulle ou infinie, on a une branche parabolique de direction (Ox) ou (Oy) . S'il y a une limite finie non nulle a , on continue.
- On calcule la limite de $f(x) - ax$. Soit elle est finie égale à b et on a une asymptote oblique d'équation $y = ax + b$, soit elle est infinie, et il y a une branche parabolique de direction $y = ax$.

Exemple :

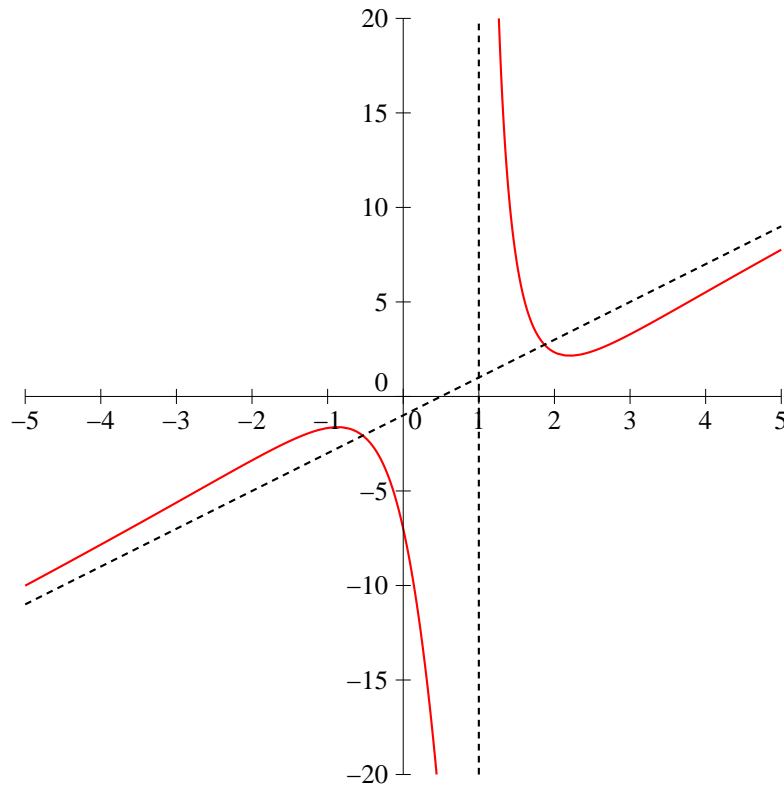
Étude des branches infinies de $f(x) = \frac{2x^4 - 5x^3 + 4x + 7}{x^3 - 2x^2 + 2x - 1}$.

Commençons par déterminer le domaine de définition : $x^3 - 2x^2 + 2x - 1$ a pour racine évidente $x = 1$, et se factorise en $(x - 1)(x^2 - x + 1)$ (je vous passe les détails de la factorisation). Le trinôme $x^2 - x + 1$ a pour discriminant $\Delta = -3$, il ne s'annule donc jamais (il est toujours positif). On a donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Pour déterminer l'existence d'une éventuelle asymptote verticale, inutile de se fatiguer et de préciser les signes : $\lim_{x \rightarrow 1} x^3 - 2x^2 + 2x - 1 = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 1} 2x^4 - 5x^3 + 4x + 7 = 8$, donc $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \pm\infty$, ce qui nous suffit à connaître l'existence d'une asymptote verticale d'équation $x = 1$.

De plus, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^4}{x^3} = +\infty$. De même, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$. Reste à calculer $f(x) - 2x = \frac{2x^4 - 5x^3 + 4x + 7 - 2x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 2x}{x^3 - 2x^2 + 2x - 1} = \frac{-x^3 - 4x^2 + 6x + 7}{x^3 - 2x^2 + 2x - 1}$, qui a pour limite -1 en $+\infty$ (même méthode qu'au-dessus). Des calculs absolument identiques amènent à la même conclusion en $-\infty$. Conclusion : la droite d'équation $y = 2x - 1$ est asymptote oblique à la courbe représentative de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

Voici l'allure de la courbe :



Exemple :

Étude des branches infinies de $g(x) = \frac{e^x - x \ln|x|}{x^2 + 1}$.

Le dénominateur ne s'annulant jamais, g est définie sur \mathbb{R}^* (il faut tout de même avoir $|x| > 0$). Quand x tend vers 0, numérateur et dénominateur convergent vers 1, puisque $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln|x| = 0$, donc il n'y a pas d'asymptote verticale.

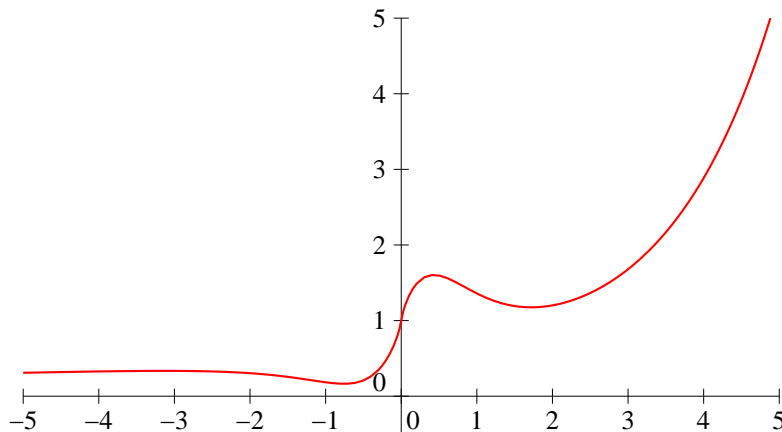
Pour calculer les limites, le principe est le même que pour les quotients de polynômes (on garde le terme « le plus fort »), mais on est obligés d'écrire la factorisation : $g(x) = \frac{e^x(1 - \frac{x \ln(x)}{e^x})}{x^2(1 + \frac{1}{x^2})}$, chacun

des deux termes entre parenthèses a pour limite 1 en $+\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$. De

même, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^3} = +\infty$. Il y a donc en $+\infty$ une branche parabolique de direction (Oy) .

En $-\infty$, c'est bien sûr différent, l'exponentielle tendant vers 0. On a cette fois, en écrivant le même genre de factorisation, $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \ln(-x)}{x^2}$, qui tend vers 0 par croissance comparée. Il y a donc une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $-\infty$.

L'allure de la courbe :



2 Arcs paramétrés

Définition 8. Un **arc paramétré** est la représentation graphique d'une fonction $f : t \mapsto \overrightarrow{f(t)}$ à valeurs dans \mathbb{R}^2 . On représentera également souvent l'image du paramètre t par ses coordonnées $\overrightarrow{f(t)} = (x(t), y(t))$. Le **support** de l'arc paramétré est constitué de tous les points du plan de coordonnées $(x(t), y(t))$ (autrement dit, de la projection orthogonale de la courbe représentative de la fonction sur un plan orthogonal à l'axe de la variable t). C'est ce support que nous chercherons à représenter.

2.1 Dérivation de fonctions à deux variables

Définition 9. Une fonction vectorielle $t \mapsto \overrightarrow{f(t)}$ admet pour le vecteur \vec{l} pour **limite** lorsque t tend vers t_0 si $\lim_{t \rightarrow t_0} \|\overrightarrow{f(t)} - \vec{l}\| = 0$.

Proposition 4. La fonction f admet pour limite $\vec{l} = (a, b)$ lorsque t tend vers t_0 si et seulement si $\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = a$ et $\lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = b$.

Démonstration. En effet,

$$\begin{aligned}
 & \lim_{t \rightarrow t_0} \|\overrightarrow{f(t)} - \overrightarrow{t}\| = 0 \\
 \Leftrightarrow & \lim_{t \rightarrow t_0} \sqrt{(x(t) - a)^2 + (y(t) - b)^2} = 0 \\
 \Leftrightarrow & \lim_{t \rightarrow t_0} (x(t) - a)^2 + (y(t) - b)^2 = 0 \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} \lim_{t \rightarrow t_0} (x(t) - a)^2 = 0 \\ \lim_{t \rightarrow t_0} (y(t) - b)^2 = 0 \end{cases} \quad \square \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} \lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = a \\ \lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = b \end{cases}
 \end{aligned}$$

Définition 10. La fonction f est **dérivable** en t_0 si son **taux d'accroissement** $\tau_{t_0} : t \mapsto \frac{\overrightarrow{f(t)} - \overrightarrow{f(t_0)}}{t - t_0}$ admet une limite lorsque t tend vers t_0 . Dans ce cas, cette limite est appelée **vecteur dérivé de f en t_0** , et noté $\overrightarrow{f'(t_0)}$. On définit ensuite les dérivées successives de la fonction f de la même manière que pour une fonction usuelle.

Proposition 5. La fonction f est dérivable en t_0 si et seulement si ses deux fonctions coordonnées sont dérivables en t_0 , et dans ce cas $\overrightarrow{f'(t_0)} = (x'(t_0), y'(t_0))$.

Démonstration. En effet, en utilisant la propriété précédente sur le calcul des limites, τ admet une limite en t_0 si et seulement si ses deux coordonnées $\frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}$ et $\frac{y(t) - y(t_0)}{t - t_0}$ admettent des limites en t_0 . Cette propriété en découle immédiatement. \square

Proposition 6. Si f et g sont deux fonctions vectorielles dérivables en t_0 , alors la fonction réelle $h : t \mapsto \overrightarrow{f(t)} \cdot \overrightarrow{g(t)}$ est dérivable en t_0 , et $h'(t_0) = \overrightarrow{f'(t_0)} \cdot \overrightarrow{g(t_0)} + \overrightarrow{f(t_0)} \cdot \overrightarrow{g'(t_0)}$. De même, la fonction $j : t \mapsto \det(\overrightarrow{f(t)}, \overrightarrow{g(t)})$ est dérivable en t_0 , et $j'(t_0) = \det(\overrightarrow{f'(t_0)}, \overrightarrow{g(t_0)}) + \det(\overrightarrow{f(t_0)}, \overrightarrow{g'(t_0)})$. Enfin, si $\|\overrightarrow{f(t_0)}\| \neq 0$, la fonction $k : t \mapsto \|\overrightarrow{f(t)}\|$ est dérivable en t_0 , de dérivée $k'(t_0) = \frac{\overrightarrow{f'(t_0)} \cdot \overrightarrow{f(t_0)}}{\|\overrightarrow{f(t_0)}\|}$.

Démonstration. Il suffit d'exprimer chaque fonction à l'aide des coordonnées et d'utiliser la propriété précédente. Ainsi, en notant $\overrightarrow{f(t)} = (x(t), y(t))$ et $\overrightarrow{g(t)} = (a(t), b(t))$, on peut écrire $j(t) = x(t)a(t) + y(t)b(t)$ et dériver les produits : $j' = x'a + xa' + y'b + yb' = (x', y') \cdot (a, b) + (x, y) \cdot (a', b')$. Le calcul pour le déterminant est quasiment identique. Pour la norme, on écrit $k(t) = \sqrt{j(t)^2}$, et on obtient la condition de dérivabilité et la formule pour la dérivée, puisque $k' = \frac{2jj'}{2\sqrt{j}} = \frac{j'}{\sqrt{j}}$. \square

Définition 11. Un arc paramétré admet une **tangente** en son point de paramètre t_0 si $\frac{\overrightarrow{f(t)} - \overrightarrow{f(t_0)}}{\|\overrightarrow{f(t)} - \overrightarrow{f(t_0)}\|}$ admet une limite quand t tend vers t_0 .

Remarque 8. Cette condition signifie qu'un vecteur directeur normé de la droite reliant les points de l'arc de paramètres t et t_0 se rapproche d'un certain vecteur, qui sera évidemment directeur de la droite tangente. C'est en fait la même notion que pour les tangentes à des courbes de fonctions réelles.

Définition 12. Soit f une fonction vectorielle dérivable en t_0 , le point de paramètre t_0 est un **point stationnaire** de l'arc si $\overrightarrow{f'(t_0)} = \overrightarrow{0}$. Dans le cas contraire, le point est un **point régulier**.

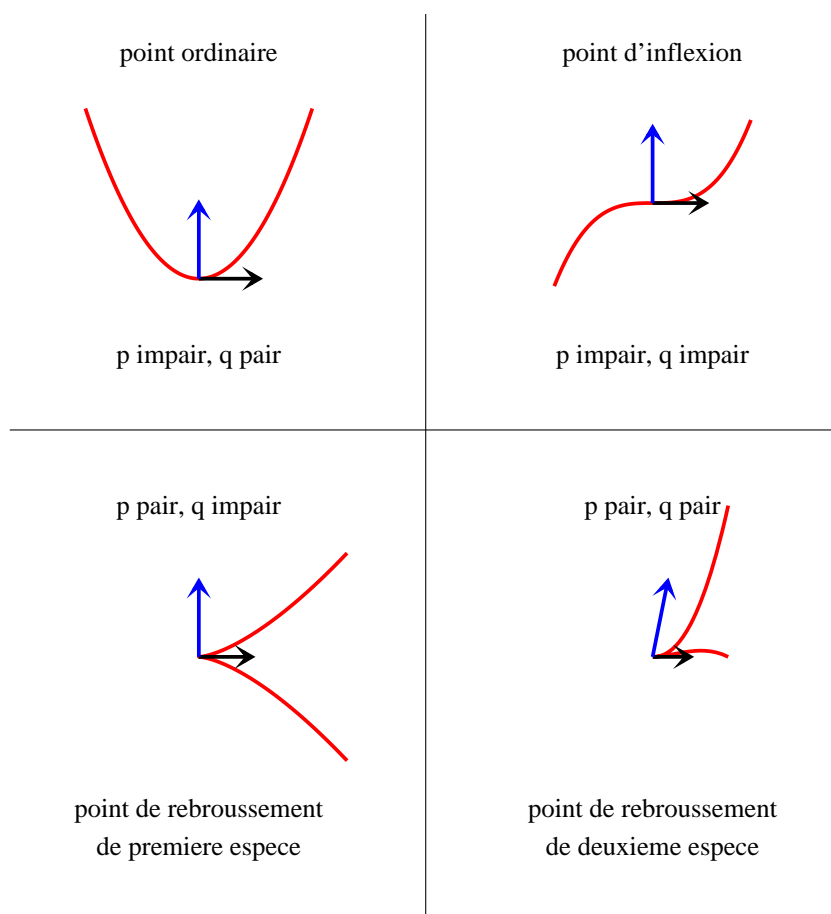
Proposition 7. Un arc paramétré admet en chacun de ses points réguliers une tangente dirigée par le vecteur $\overrightarrow{f'(t_0)}$.

Exemple : Un arc paramétré peut très bien admettre également des tangentes en ses points stationnaires, ce sera même très souvent le cas ! Par exemple, si $\vec{f}(t) = (t^2, t^4)$, on a un point stationnaire (l'origine du repère) si $t = 0$, mais comme $y = x^2$ quelle que soit la valeur de t , la courbe est simplement constitué de la moitié droite de la parabole $y = x^2$ (moitié droite seulement car t^2 sera toujours positif), parcourue dans un sens puis dans l'autre). À l'origine, cette courbe admet l'axe des abscisses comme tangente.

Proposition 8. Si le quotient $\frac{y(t) - y(t_0)}{x(t) - x(t_0)}$ admet une limite finie m quand t tend vers t_0 , alors l'arc paramétré admet une tangente de pente m en t_0 . Si ce même quotient admet pour limite $\pm\infty$, il y aura une tangente verticale.

Remarque 9. On peut retrouver la tangente horizontale de l'exemple précédent de cette façon, puisque $\frac{y(t) - y(0)}{x(t) - x(0)} = \frac{t^4}{t^2}$ qui tend vers 0 en 0. Cette méthode permet théoriquement de gérer également le cas des points stationnaires, mais en pratique la limite de ce quotient peut être fort pénible à calculer, on va donc admettre le résultat beaucoup plus puissant suivant (sa démonstration nécessite des connaissances sur les développements limités) :

Théorème 1. Soit p le plus petit entier non nul tel que $\vec{f}^{(p)}(t_0) \neq \vec{0}$ (le point est donc stationnaire si $p \geq 2$, et q le plus petit entier strictement supérieur à p tel que $\vec{f}^{(q)}(t_0)$ ne soit pas colinéaire à $\vec{f}^{(p)}(t_0)$). La tangente à l'arc en son point de paramètre t_0 est toujours dirigée par L'allure de l'arc paramétré aux alentours de son point de paramètre t_0 est alors décrite par un des quatre cas suivants, selon la parité des entiers p et q (en noir $\vec{f}^{(p)}(t_0)$, en bleu $\vec{f}^{(q)}(t_0)$) :



Remarque 10. Même si on retient pas par coeur les quatre cas, on ne doit pas avoir de problème à tracer les courbes en pratique, en observant simplement les variations des fonctions x et y . Par exemple, si x et y admettent simultanément un minimum en t_0 , on sera dans un cas de rebroussement de deuxième espèce.

Exemple : Étude complète de la fonction paramétrée $f : t \mapsto \begin{cases} x(t) = \cos^3(t) \\ y(t) = \sin^3(t) \end{cases}$.

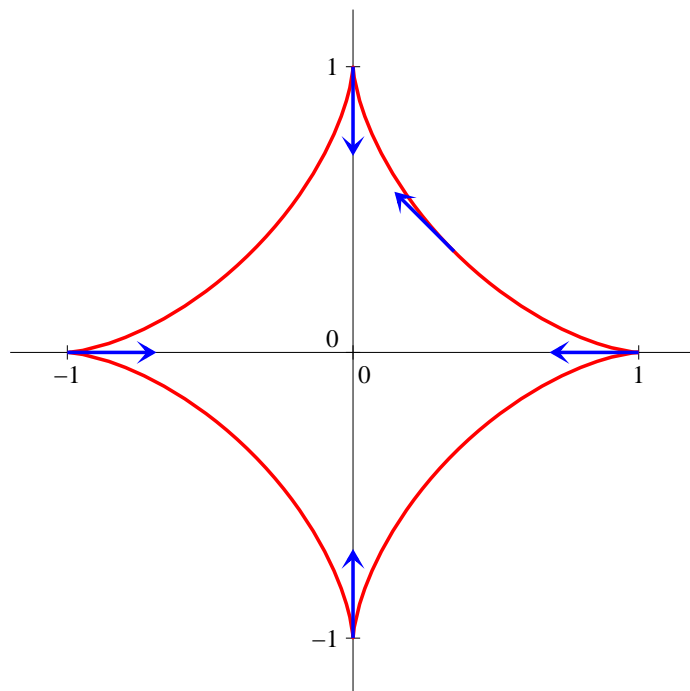
La fonction étant 2π -périodique, on peut se contenter de faire une étude sur l'intervalle $[0; 2\pi]$. De nombreuses autres symétriques peuvent en fait permettre de réduire l'intervalle à $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$, mais nous allons garder un intervalle « trop gros » pour ce premier exemple. La fonction f est dérivable sur \mathbb{R} , et $x'(t) = -3\sin(t)\cos^2(t)$; $y'(t) = 3\cos(t)\sin^2(t)$. Ces dérivées sont respectivement du signe de $-\sin(t)$ et de $\cos(t)$, on peut donc faire le double tableau de variations suivant (en indiquant bien toutes les valeurs annulant les dérivées pour repérer les points stationnaires) :

t	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π				
$x'(t)$	0	-	0	-	0	+	0	+	0
$x(t)$	1	↘ 0		-1	↗ 0		1		
$y'(t)$	0	+	0	-	0	-	0	+	0
$y(t)$	0	↗ 1		0	↘ -1		0		

Il y a quatre points stationnaires qui se traitent tous de la même manière. On calcule $x''(t) = -3\cos^3(t) + 3\sin^2(t)\cos(t)$ et $y''(t) = 3\sin^3(t) - 3\cos^2(t)\sin(t)$. On en déduit que la tangente en 0 est horizontale dirigée vers la gauche ($x'' = -3$ et $y'' = 0$), celle en $\frac{\pi}{2}$ verticale dirigée vers le bas, celle en π horizontale vers la droite, et celle en $\frac{3\pi}{2}$ verticale vers le haut. Si on veut être complet, on vérifie que les points sont tous des points de rebroussement de première espèce en calculant $x'''(t) = 9\cos^2(t)\sin(t) + 6\cos^2(t)\sin(t) - 3\sin^3(t) = 15\cos^2(t)\sin(t) - 3\sin^3(t)$ et $y'''(t) = 9\cos(t)\sin^2(t) + 6\cos(t)\sin^2(t) - 3\cos^3(t) = 15\cos(t)\sin^2(t) - 3\cos^3(t)$. La dérivée tierce est toujours orthogonale à la dérivée seconde pour les points stationnaires.

Ce n'est pas indispensable, mais pour donner un petit calcul supplémentaire, regardons ce qui se passe en $\frac{\pi}{4}$: on a alors $x(t) = y(t) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 = \frac{\sqrt{2}}{4}$; et $x'(t) = -\frac{3\sqrt{2}}{4}$, $y'(t) = \frac{3\sqrt{2}}{4}$. Il s'agit donc d'un point régulier dont la tangente est dirigée par le vecteur $(-1, 1)$.

On conclut bien sûr l'étude par une belle courbe, qui porte ici le nom d'astroïde :



2.2 Branches infinies

Définition 13. Un arc paramétré admet une **branche infinie** quand t tend vers t_0 si $\lim_{t \rightarrow t_0} \|\overrightarrow{f(t)}\| = +\infty$.

Remarque 11. Cette situation se produit si (au moins) une des deux fonctions coordonnées x et y a une limite infinie en t_0 . On autorise dans cette définition t_0 à être infini (aucune raison de distinguer dans le cas des arcs paramétrés).

Définition 14. Une droite d du plan est **asymptote** à l'arc paramétré en t_0 si l'arc y admet une branche infinie et $\lim_{t \rightarrow t_0} d(M(t), d) = 0$, où $M(t)$ désigne le point de l'arc de paramètre t .

Proposition 9. La droite verticale d'équation $x = a$ est asymptote à un arc paramétré en t_0 si $\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = a$ et $\lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = \pm\infty$.

La droite horizontale d'équation $y = b$ est asymptote à un arc paramétré en t_0 si $\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = \pm\infty$ et $\lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = b$.

Plus généralement, la droite d'équation $ax + by + c = 0$ est asymptote à un arc paramétré en t_0 si $\lim_{t \rightarrow t_0} ax(t) + by(t) + c = 0$.

Démonstration. En effet, si d a pour équation $ax + by + c = 0$, on sait que $d(M(t), d) = \frac{|ax(t) + by(t) + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. Ce quotient vers 0 si et seulement si ce qui se trouve dans la valeur absolue a une limite nulle. \square

Méthode : La recherche de branches infinies d'un arc paramétré est très similaire à celle étudiée pour une fonction réelle.

- On se place au voisinage d'une valeur t_0 pour laquelle une deux fonctions coordonnées a une limite infinie. Si l'autre fonction coordonnée n'a pas une limite infinie, il s'agit d'une asymptote verticale ou horizontale. Sinon, on continue.
- On calcule $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y(t)}{x(t)}$. Si cette limite est nulle, on dira (comme pour une fonction réelle) qu'il s'agit d'une **branche parabolique de direction** (Ox). Si elle est infinie, c'est une **branche parabolique de direction** (Oy). Si on trouve une limite finie a , on continue.

- On calcule $\lim_{t \rightarrow t_0} y(t) - ax(t)$. Si on obtient une limite finie b , la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à l'arc, sinon il y a une **branche parabolique de direction la droite d'équation $y = ax$** .

Exemple : Étude complète de la fonction $f; t \mapsto \begin{cases} x(t) &= \frac{t^2}{t^2 - 4} \\ y(t) &= \frac{t^2 - t}{t - 2} \end{cases}$.

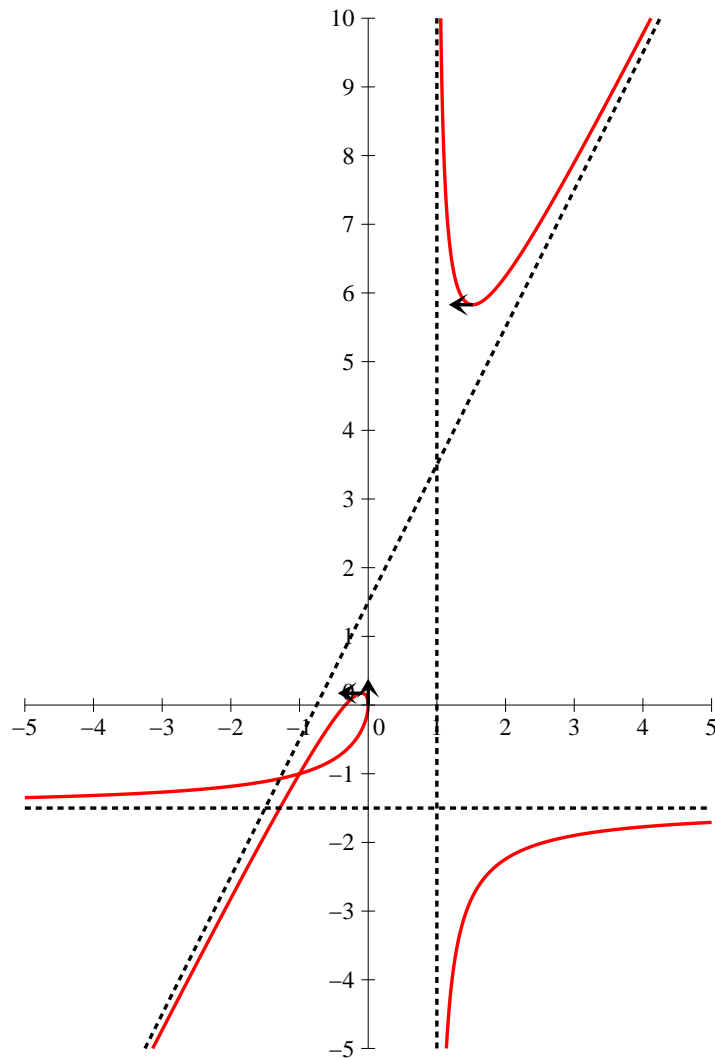
La fonction est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$, et admet donc a priori deux branches infinies. Commençons donc par les étudier. Comme $\lim_{t \rightarrow -2^-} x(t) = \frac{4}{0^+} = +\infty$, $\lim_{t \rightarrow -2^+} x(t) = \frac{4}{0^-} = -\infty$ et $\lim_{t \rightarrow -2} y(t) = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$, la droite d'équation $y = -\frac{3}{2}$ est asymptote horizontale à la courbe. Le fait que la limite change de signe pour x signifie que la trajectoire va se diriger vers la droite en -2^- , et repartir de la gauche en -2^+ . Pour $t = 2$, les deux fonctions coordonnées ont des limites infinies : $\lim_{t \rightarrow 2^-} x(t) = \frac{4}{0^-} = -\infty$, $\lim_{t \rightarrow 2^+} x(t) = \frac{4}{0^+} = +\infty$, $\lim_{t \rightarrow 2^-} y(t) = \frac{2}{0^-} = -\infty$ et $\lim_{t \rightarrow 2^+} y(t) = \frac{2}{0^+} = +\infty$. Calculons donc $\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{(t^2 - t)(t^2 - 4)}{t^2(t - 2)} = \frac{(t + 2)(t^2 - t)}{t^2}$, qui a pour limite 2 quand t tend vers 2. Calculons alors $y(t) - 2x(t) = \frac{t^2 - t}{t - 2} - \frac{2t^2}{t^2 - 4} = \frac{(t^2 - t)(t + 2) - 2t^2}{(t - 2)(t + 2)} = \frac{t^3 - t^2 - 2t}{(t - 2)(t + 2)} = \frac{t(t - 2)(t + 1)}{(t - 2)(t + 2)} = \frac{t(t + 1)}{t + 2}$ qui a pour limite $\frac{3}{2}$ quand t tend vers 2. La droite d'équation $y = 2x + \frac{3}{2}$ est donc asymptote à la courbe quand t tend vers 2 (là aussi les changements de signe des limites indiquent de quel côté de l'asymptote on se trouve en 2^- et en 2^+).

En $\pm\infty$, on constate en utilisant le quotient des termes de plus haut degré que x a pour limite 1 et y a pour limite $\pm\infty$, ce qui indique la présence d'une autre asymptote, verticale cette fois-ci, d'équation $x = 1$ aux deux infinis.

Passons à l'étude des variations : $x'(t) = \frac{2t(t^2 - 4) - 2t^3}{(t^2 - 4)^2} = \frac{-8t}{(t^2 - 4)^2}$; et $y'(t) = \frac{(2t - 1)(t - 2) - (t^2 - t)}{(t - 2)^2} = \frac{t^2 - 4t + 2}{(t - 2)^2}$. Le numérateur de ce quotient a pour discriminant $\Delta = 16 - 8 = 8$, et s'annule donc pour $t_1 = \frac{4 - 2\sqrt{2}}{2} = 2 - \sqrt{2}$, et $t_2 = \frac{4 + 2\sqrt{2}}{2} = 2 + \sqrt{2}$. On peut calculer $x(2 - \sqrt{2}) = \frac{4 - 4\sqrt{2} + 2}{4 - 4\sqrt{2} + 2 - 4} = \frac{3 - 2\sqrt{2}}{1 - 2\sqrt{2}} = \frac{(3 - 2\sqrt{2})(1 + 2\sqrt{2})}{1 - 8} = \frac{5 - 4\sqrt{2}}{7}$, $y(2 - \sqrt{2}) = \frac{4 - 4\sqrt{2} + 2 - 2 + \sqrt{2}}{-\sqrt{2}} = \frac{-4 + 3\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{6 - 4\sqrt{2}}{2} = 3 - 2\sqrt{2}$; puis $x(0) = y(0) = 0$ (ça c'est gentil); et enfin $x(2 + \sqrt{2}) = \frac{4 + 4\sqrt{2} + 2}{4 + 4\sqrt{2} + 2 - 4} = \frac{3 + 2\sqrt{2}}{1 + 2\sqrt{2}} = \frac{(3 + 2\sqrt{2})(1 - 2\sqrt{2})}{1 - 8} = \frac{5 + 4\sqrt{2}}{7}$ et $y(2 + \sqrt{2}) = \frac{4 + 4\sqrt{2} + 2 - 2 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{4 + 3\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 3 + 2\sqrt{2}$. Ouf, on peut dresser le tableau de variations suivant :

t	$-\infty$	-2	0	$2 - \sqrt{2}$	2	$2 + \sqrt{2}$	$+\infty$
$x'(t)$	+		+ 0 - < 0			- < 0 -	
x	$1 \rightarrow +\infty$		$-\infty \rightarrow 0 \rightarrow \frac{5 - 4\sqrt{2}}{7} \rightarrow -\infty$			$+\infty \rightarrow \frac{5 + 4\sqrt{2}}{7} \rightarrow 1$	
$y'(t)$	+ > 0		+ > 0 + 0 -			- 0 +	
y	$-\infty \rightarrow -\frac{3}{2}$		$-\frac{3}{2} \rightarrow 0 \rightarrow 3 - 2\sqrt{2} \rightarrow -\infty$			$+\infty \rightarrow 3 + 2\sqrt{2} \rightarrow +\infty$	

On peut constater qu'il existe un point double (atteint pour deux valeurs distinctes du paramètre) sur cette courbe, le point de coordonnées $(-1, -1)$ qui est atteint à la fois lorsque $t = \sqrt{2}$ et $t = -\sqrt{2}$.



3 Fonctions polaires

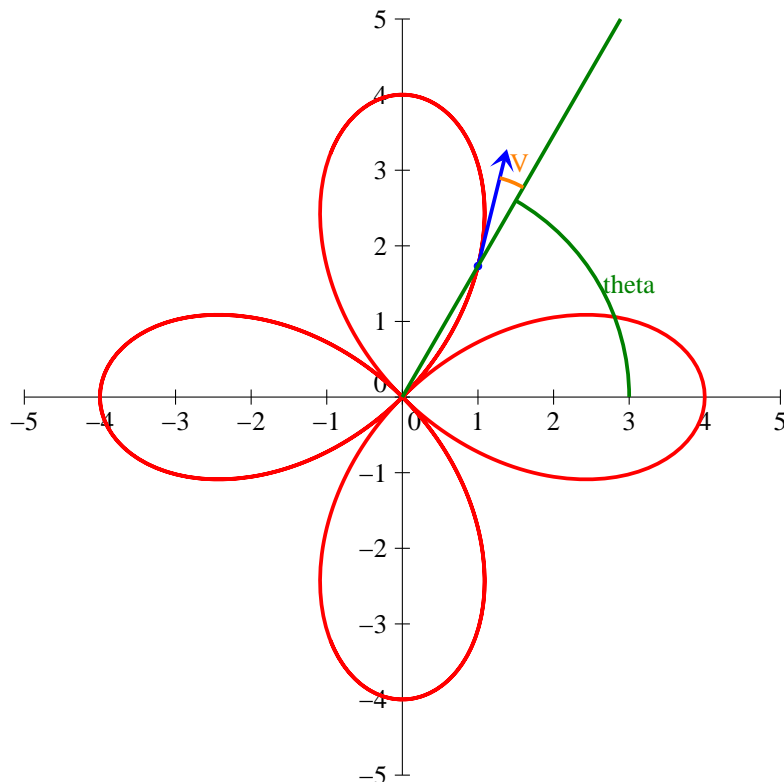
On s'intéresse dans cette dernière partie à des arcs paramétrés définis par une équation polaire de la forme $\overrightarrow{f}(t) = \rho(t)\overrightarrow{u_{\theta(t)}}$. Il y a en fait très très peu de choses à savoir sur ces fonctions.

Proposition 10. Pour tout réel t , $\overrightarrow{f}'(t) = \rho'(t)\overrightarrow{u_{\theta(t)}} + \rho(t)\theta'(t)\overrightarrow{v_{\theta(t)}}$. De même, $\overrightarrow{f}''(t) = (\rho''(t) - \rho(t)\theta'^2(t))\overrightarrow{u_{\theta(t)}} + (2\rho'(t)\theta'(t) + \rho(t)\theta''(t))\overrightarrow{v_{\theta(t)}}$.

Démonstration. La façon la plus simple de voir les choses est d'écrire que $f = \rho \times u \circ \theta$, où la fonction u est définie par $\overrightarrow{u}(t) = \cos(t)\overrightarrow{i} + \sin(t)\overrightarrow{j}$, de dérivée $-\sin(t)\overrightarrow{i} + \cos(t)\overrightarrow{j} = \overrightarrow{v}_t$. De même, on obtient que $\overrightarrow{v}'(t) = -\overrightarrow{u}_t$, en notant $v : t \mapsto \overrightarrow{v}_t$ (les physiciens écrivent sans vergogne que $\frac{d\overrightarrow{u}_t}{dt} = \overrightarrow{v}_t$). On dérive ensuite simplement le produit $\rho \times u \circ \theta$, ce qui donne $\rho' \times u \circ \theta + \rho\theta' \times u' \circ \theta$, soit $\rho'\overrightarrow{u_{\theta(t)}} + \rho\theta'\overrightarrow{v_{\theta(t)}}$. On obtient la dérivée seconde de même en dérivant une nouvelle fois cette expression : $\rho'' \times u \circ \theta + \rho'\theta' \times u' \circ \theta + \rho'\theta' \times u' \circ \theta + \rho\theta'' \times u' \circ \theta + \rho\theta' \times u'' \circ \theta$, avec $u'' = v' = -u$. \square

Remarque 12. En pratique, on étudiera pratiquement uniquement des fonctions polaires pour lesquelles $\theta(t) = t$, auquel cas on note simplement le paramètre θ . On a alors $\overrightarrow{f}'(\theta) = \rho'(\theta)\overrightarrow{u_{\theta}} + \rho(\theta)\overrightarrow{v_{\theta}}$. On peut alors constater les propriétés suivantes :

- les seuls points stationnaires possibles vérifient $\rho(\theta) = 0$, donc des points où la trajectoire se trouve à l'origine du repère. Il ne peut s'agir que de points ordinaire (si ρ change de signe) ou de points de rebroussement de première espèce.
- si $\rho'(\theta) = 0$, la tangente est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{v_{\theta}}$, on parle alors de tangente **orthoradiale**. Autre façon de voir les choses, la **normale** à la courbe (droite perpendiculaire à la tangente) est radiale, c'est-à-dire dirigée par $\overrightarrow{u_{\theta}}$.
- En général, si on note V l'angle $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{f}'(\theta)) - \theta$, on aura $\tan(V) = \frac{\rho(\theta)}{\rho'(\theta)}$.



Sur cette courbe (pour les curieux, il s'agit de la fonction $\rho(\theta) = \cos(2\theta)$), on a tracé en bleu la tangente en un point, l'angle V est représenté en orange.

- Si $\lim_{\theta \rightarrow \theta_0} \rho(\theta) = \pm\infty$, la droite passant par l'origine d'équation $\theta = \theta_0$ est toujours direction asymptotique à la courbe. Pour déterminer s'il y a effectivement une asymptote ou une simple branche parabolique, on étudie la distance des points de la courbe à la droite, donnée par $\rho(\theta) \sin(\theta - \theta_0)$ (s'il y a une limite finie l , il y aura une asymptote de même direction que la droite $\theta = \theta_0$ mais située à distance l de cette dernière, si la limite est infinie c'est une branche parabolique).
- Si $\lim_{\theta \rightarrow \pm\infty} \rho(\theta)$ est finie, il y a un cercle asymptote (celui de rayon égal à la limite), si cette limite est infinie, la courbe prend une allure de spirale.
- Les symétries de la courbe jouent un rôle très important dans l'étude des fonctions polaire. Par exemple, $\rho(\theta + \pi) = \rho(\theta)$ indique une symétrie par rapport à l'origine du repère.

Exemple : Étude de la courbe polaire $\rho(\theta) = \frac{\cos(2\theta)}{\cos(\theta)}$.

La fonction est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$. Elle est évidemment 2π -périodique, mais on peut également constater que $\rho(\theta + \pi) = -\rho(\theta)$, ce qui signifie que la courbe obtenue sur $[\pi; 2\pi]$ est identique à la courbe obtenue sur $[0; \pi]$, intervalle que nous prendrons comme intervalle d'étude (on peut encore réduire car $\rho(\pi - \theta) = -\rho(\theta)$, ce qui indique une symétrie par rapport à l'axe (Ox)).

La fonction est dérivable sur son domaine de définition, de dérivée

$$\rho'(\theta) = \frac{-2 \sin(2\theta) \cos(\theta) + \sin(\theta) \cos(2\theta)}{\cos^2(\theta)} = \frac{-4 \sin(\theta) \cos^2(\theta) + \sin(\theta)(2 \cos^2(\theta) - 1)}{\cos^2(\theta)}$$

$$= \frac{\sin(\theta)(-2 \cos^2(\theta) - 1)}{2 \cos^2(\theta)},$$

qui est du signe opposé à celui de $\sin(\theta)$, donc négative sur $[0; \pi]$. Cette dérivée s'annule en 0 et en π , les tangentes à la courbe aux points correspondants seront donc orthoradiales, c'est-à-dire ici verticales.

Il y a une branche infinie en $\frac{\pi}{2}$, la distance à la droite d'équation $\theta = \frac{\pi}{2}$, qui n'est autre que l'axe des ordonnées, est donnée par $\rho(\theta) \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = -\rho(\theta) \cos(\theta)$ (ce qui représente l'opposé de l'abscisse du point). Cette quantité vaut ici $-\cos(2\theta)$, qui a pour limite 1 quand θ tend vers $\frac{\pi}{2}$. Il y aura une asymptote verticale d'équation $x = -1$ (distance 1 de l'axe des ordonnées dans la direction de \vec{v}_{θ_0}).

Pour compléter le tableau de variations, on peut ajouter les valeurs pour lesquelles $\rho(\theta) = 0$, ici cela signifie que $\cos(2\theta) = 0$, ce qui se produit en $\theta = \frac{\pi}{4}$ et $\theta = \frac{3\pi}{4}$. Ces deux points sont des points réguliers (ρ change de signe puisque la fonction est décroissante), il y aura des tangentes radiales pour ces deux valeurs de θ .

θ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$\rho(\theta)$	1	0	$+\infty$	0	-1

On achève bien sûr l'étude par le tracé de la courbe :

