Continuité

PTSI B Lycée Eiffel

15 février 2013

Un prof de maths explique à une blonde comment montrer que $\lim\limits_{x \to 8} \dfrac{1}{x-8} = \infty$.
La blonde assure avoir parfaitement compris.
Pour vérifier, le prof lui demande ce que vaut $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{1}{x-5}$.
Et la blonde répond, très fière d'elle : $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{1}{x-5} = \rotatebox{90}{5}$.

Une fois qu'on a passé les bornes, il n'y a plus de limite.

Alphonse Allais.

Introduction

Un petit chapitre de transition entre deux chapîtres d'algèbre pour reprendre de façon rigoureuse la notion de limite et de continuité sur les fonctions réelles. Pour les limites, ce sera très simple si vous avez bien assimilé le chapître correspondant sur les suites. Quant à la continuité, ce n'est finalement qu'une question de limite (notion locale) qu'on étend sur un intervalle (notion globale). Elle mène toutefois à quelques théorèmes d'analyse fondamentaux que nous aborderons en fin de chapître, donc le fameux théorème des valeurs intermédiaires que vous connaissez déjà bien mais que vous appliquez en général fort mal.

Objectifs du chapitre :

- savoir calculer des limites efficacement, et notamment bien saisir la notion d'équivalent sur les fonctions et les pièges qui lui sont associés.
- comprendre la différence entre théorème des valeurs intermédiaires et théorème de la bijection, et reconnaître les situations permettant d'utiliser chacun d'eux.

1 Limites

Remarque 1. Comme nous avons déjà abordé dans le tout premier chapître de l'année le vocabulaire classique sur les fonction réelles, nous ne reviendrons pas dessus dans ce chapître. Ajoutons toutefois la notation $\sup_{x \in I} f$ qui désigne la borne supérieur de l'ensemble $\{f(x) \mid x \in I\}$. On définit bien sûr de même $\inf_{x \in I} f$.

Définition 1. Une fonction f définie sur un intervalle de la forme $[a;+\infty[$ **admet pour limite** $l \in \mathbb{R}$ **en** $+\infty$ si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x_0 \in \mathbb{R}$, $\forall x \geqslant x_0$, $|f(x) - l| < \varepsilon$. On définit de même une limite finie quand x tend vers $-\infty$ en reamplaçant simplement la condition $\forall x \geqslant x_0$ par $\forall x \leqslant x_0$ (et on suppose f définie sur un intervalle de la forme $]-\infty; a]$). On le note respectivement $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l$.

Remarque 2. Cette définition étant strictement identique à celle qu'on a vue dans le cadre des suites, nous allons rapidement passer à la suivante. Notons qu'elle est même plus facile à manier que dans le cas des suites puisqu'on n'a pas besoin de s'embêter à prendre des parties entières pour la valeur de x_0 si on veut l'appliquer à un calcul de limite pratique.

Définition 2. Une fonction f définie sur un intervalle de la forme $[a;+\infty[$ **admet pour limite** $+\infty$ **(respectivement** $-\infty$**) en** $+\infty$ si $\forall M \in \mathbb{R}$, $\exists x_0 \in \mathbb{R}$, $\forall x \geqslant x_0$, $f(x) \geqslant M$ (resp. $f(x) \leqslant M$). On le note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ (restp. $-\infty$), et on définit bien sûr de façon similaire des limites infinies en $-\infty$.

Là encore, rien de nouveau sous le soleil.

Définition 3. Une fonction f définie sur un intervalle contenant le réel a (mais pas nécessairement définie en a) **admet pour limite** $l \in \mathbb{R}$ **quand** x **tend vers** a si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \eta > 0$, $\forall x \in]a-\eta; a+\eta[\backslash\{a\}$, $|f(x) - l| < \varepsilon$. On note alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$.

Remarque 3. Cette définition est au fond assez naturelle : on est aussi proche que souhaité de l quitte à se mettre suffisamment près de a au départ.

Exemple : Montrons à l'aide de cette définition que $\lim\limits_{x \to 1} x^2 = 1$. Fixons donc (comme on le faisait pour les suites) un $\varepsilon > 0$, on souhaite vérifier la condition $|x^2 - 1| < \varepsilon$, soit $|x-1| \times |x+1| < \varepsilon$. Quitte à imposer $\eta \leqslant \dfrac{1}{2}$ (on chercher simplement une valeur convenable de toute façon), $\dfrac{1}{2} \leqslant |x+1| \leqslant \dfrac{3}{2}$, donc il faut avoir $|x+1| \leqslant \dfrac{2\varepsilon}{3}$. La constante $\eta = \min\left(\dfrac{2\varepsilon}{3}; \dfrac{1}{2}\right)$ convient donc.

Définition 4. Une fonction f définie sur un intervalle contenant le réel a **admet pour limite** $+\infty$ **(resp.** $-\infty$**) quand** x **tend vers** a si $\forall M \in \mathbb{R}$, $\exists \eta > 0$, $\forall x \in]a-\eta; a+\eta[\backslash\{a\}$, $f(x) \geqslant M$ (resp. $f(x) \leqslant M$). On note alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$.

Remarque 4. Dans les deux dernières définitions, on a exclu la valeur a de l'intervalle où l'inégalité doit être vérifiée, ce qui est absolument nécessaire si on veut une définition raisonnable de la limite. En effet, sinon, aucune fonction ne pourrait avoir de limite infinie en 0 (par exemple) car la valeur de $f(0)$ empêcherait la définition de fonctionner.

Proposition 1. La limite d'une fonction f (que ce soit en a ou en $\pm\infty$), lorsqu'elle existe, est unique.

Démonstration. C'est exactement la même preuve que dans le cas des suites. □

Définition 5. Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$, un **voisinage** de a est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant a (ou dans le cas où a est infini, un intervalle de la forme $]b;+\infty[$ ou $]-\infty; c[$).

Remarque 5. La notion de voisinage, même si elle peut paraître extrêmement rudimentaire, permet d'unifier toutes les différentes définitions de la limite qu'on a données depuis le début du chapître. En effet, que a et l soient finis ou infinis, on pourra toujours traduire $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ de la façon suivante : pour tout voisinage V de l, il existe un voisinage W de a tel que $f(W) \subset V$ (je vous laisse vérifier). Elle permet aussi de donner des démonstrations simples et élégantes de la plupart des propriétés élémentaires sur les limites. On évitera toutefois un recours trop systématique à cette notion qui est à la frontière du programme.

Proposition 2. Une fonction admettant une limite finie en a est bornée au voisinage de a.

Démonstration. Comme dans le cas des suites, il suffit de prendre par exemple $\varepsilon = 1$ dans la définition pour trouver un intervalle sur lequel f est bornée. $\square$

Définition 6. La fonction f admet pour limite **à gauche** quand x tend vers a un nombre l (éventuellement infini) si on remplace dans la définition de la limite la condition $x \in]a-\eta; a+\eta[$ par la condition $x \in]a-\eta; a[$. On définit de même une notion de limite **à droite** en remplaçant la condition par $x \in]a; a+\eta[$. On le note respectivement $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = l$ et $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = l$.

Remarque 6. Clairement, f admet pour limite l en a si et seulement si $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = l$.

Exemple : La fonction partie entière admet en chaque entier naturel des limites à gauche et à droite qui sont distinctes. Ainsi, $\lim\limits_{x \to 2^+} Ent(x) = 2$, mais $\lim\limits_{x \to 2^-} Ent(x) = 1$.

Théorème 1. Toutes les propriétés vues dans le chapître sur les suites concernant les opérations et les limites, ainsi que les inégalités et les limites, restent valables sur les fonctions, que ce soit en $\pm\infty$ ou en $a \in \mathbb{R}$. Nous ne reviendrons pas dessus, pas plus que nous ne referons de démonstrations concernant les limites de fonctions usuelles vues en début d'année.

Proposition 3. Soient f et g deux fonctions telles que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ et $\lim\limits_{x \to b} g(x) = l$, alors $\lim\limits_{x \to a} g \circ f(x) = l$ (tous les réels ayant le droit d'être infinis).

Remarque 7. Ce résultat reste vrai quand on compose une fonction et une suite : si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = a$ et $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = l$.

Démonstration. C'est la seule démonstration que je ferai à l'aide de voisinages pour ne pas avoir à distinguer plein de cas. Soit donc V un voisinage de l. Puisque $\lim\limits_{x \to b} g(x) = l$, il existe un voisinage W de b tel que $g(W) \subset V$. De même, il existe un voisinage U de a tel que $f(U) \subset W$. On en déduit que $g \circ f(U) \subset g(W) \subset V$, donc on a trouvé un voisinage convenable de a, et $\lim\limits_{x \to a} g \circ f(x) = l$. $\square$

Proposition 4. Caractérisation séquentielle de la limite.
Une fonction f admet pour limite l quand x tend vers a si et seulement si, pour toute suite (u_n) telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = a$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = l$.

Démonstration. Le sens réciproque est évident, c'est la composition d'une limite de suite et de fonction qu'on vient de voir. Pour l'autre sens, on va en fait démontrer la réciproque : supposons que f n'admet pas pour limite l lorsque x tend vers a. Pour simplifier, on prendra des valeurs finies pour a et l même si la caractérisation reste vraie avec des limites infinies. Si on prend la négation de la définition de la limite, $\exists \varepsilon > 0$, $\forall \eta > 0$, $\exists x \in]a-\eta; a+\eta[$, $|f(x) - l| \geqslant \varepsilon$. Fixons donc un tel ε, et prenons comme valeurs de η les nombres $\dfrac{1}{n}$. Il existe donc, quel que soit l'entier n, (au moins) un réel que l'on va noter x_n dans l'intervalle $\left]a - \dfrac{1}{n}; a + \dfrac{1}{n}\right[$, pour lequel $|f(x) - l| \geqslant \varepsilon$. Par construction, la suite (x_n) converge vers a (puisque $a - \dfrac{1}{n} < x_n < a + \dfrac{1}{n}$, c'est une application du théorème des gendarmes), et pourtant $f(x_n)$ ne peut pas converger vers l puisque cette suite est oujours à une distance de l plus grande qu'un $\varepsilon > 0$ fixé. Ceci démontre la contraposée du sens direct du théorème, et donc le théorème lui-même. $\square$

Remarque 8. Cette caractérisation peut surtout être utile pour prouver qu'une fonction n'admet pas de limite à un endroit donné. Pour celà, il suffit en effet de trouver par exemple deux suites convergeant vers la valeur en question, mais pour lesquelles les images par f n'ont pas la même limite. Prenons par exemple $f(x) = \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$, dont on veur étudier le comportement en 0. Posons d'abord $u_n = \dfrac{1}{2n\pi}$, la suite (u_n) converge vers 0 et $f(u_n) = \cos(2n\pi) = 1$ est une suite constante convergeant vers 1. Considérons désormais $v_n = \dfrac{1}{(2n+1)\pi}$, la suite (v_n) tend également vers 0, mais cette fois-ci $f(v_n) = -1$. La fonction f ne peut donc pas admettre de limite en 0.

Théorème 2. Théorème de la limite monotone.
Toute fonction monotone définie sur un intervalle I admet en tout point de I une limite à gauche (sauf pour la borne inférieure de I, et en tout point de I une limite à droite (sauf pour la borne supérieure de I). Ces limites peuvent être infinies. Si on note $I =]a;b[$, dans le cas où la fonction est croissante, on aura toujours $\lim\limits_{x \to c^-} f(x) = \sup_{x \in]a;c[} f$, et $\lim\limits_{x \to c^+} f(x) = \inf_{x \in]c;b[} f$ (si f est décroissante, on inverse le rôle des bornes inférieure et supérieure).

Démonstration. La démonstration est à peu près identique à celle effectuée dans le cas des suites, si ce n'est qu'on a en plus le cas des limites infinies à traiter. Supposons donc f croissante et notons c un point de l'intervalle, et $l = \sup_{x<c} f$. Si $l = +\infty$, cela signifie que l'ensemble $\{f(x) \mid x \leqslant c\}$ n'est pas majoré. Autrement dit, quel que soit le réel M, il existe un $x_M \leqslant c$ tel que $f(x_m) > M$. Par croissance de f, on aura alors $f(x) > M$ sur tout l'intervalle $[x_M; c[$, et on en déduit que $\lim\limits_{x \to c} f(x) = +\infty$. Si au contraire l est fini, choisisson un $\varepsilon > 0$. Par caractérisation de la borne supérieure, il existe un $x_0 \leqslant c$ tel que $l - \varepsilon < f(x_0) \leqslant l$. En notant $\eta = c - x_0$ et en utilisant la croissance de f, on obtient que $l - \varepsilon < f(x) \leqslant l$ sur tout l'intervalle $[c - \eta; c[$, ce qui correspond exactement à la définition de la limite. Les autres cas (fonction décroissante, limite à droite) se traitent exactement de la même façon. On peut même ne rien faire du tout en constatant que, si f est décroissante, $-f$ est croissante, ce qui ramène au cas précédent ; et que, pour la limite à droite on peut considérer la fonction $x \mapsto f(-x)$ qui renverse l'ordre et tranforme donc la limite à droite en limite à gauche. $\square$

Définition 7. Une fonction f définie sur un intervalle I est **continue en** $a \in I$ si $\lim\limits_{x \in a} f(x) = f(a)$. La fonction f est **continue à gauche** en a si $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a)$, et **continue à droite** en a si $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$. Elle est continue en a si et seulement si elle est continue à gauche et à droite en a.

Exemple : La fonction partie entière (notre exemple préféré quand il s'agit de continuité) est continue à droite en tout réel, mais elle n'est pas continue à gauche en x (et donc pas continue du tout) lorsque $x \in \mathbb{Z}$.

Définition 8. Une fonction f est **continue sur un intervalle** I si elle est continue en tout point de I.

Théorème 3. Tous les résultats classiques sur les opérations et les limites permettent de prouver facilement qu'une somme, un produit, un quotient, une composée de fonctions continues est une fonction continue. Par ailleurs, toutes les fonctions usuelles (sauf la partie entière) sont continues sur tous les intervalles où elles sont définies. ces résultats seront souvent désignés par le terme générique de théorèmes généraux, et utilisés sans rentrer dans le détail dans les exercices (on se concentrera sur les études de continuité aux endroits où il y a vraiment un calcul à faire ou une réflexion à mener).

Proposition 5. Soit f une fonction définie sur $I \backslash \{a\}$ admettant une limite finie l quand x tend vers a, alors on peut prolonger f de manière unique en une fonction continue sur I en posant $f(a) = l$ (on garde habituellement la même notation pour la fonction prolongée, même si c'est un abus de notation). On parle de **prolongement par continuité** de f en a.

Exemple : La fonction $f : x \mapsto x \ln x$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ mais prolongeable par continuité à $\mathbb{R}_+$ en posant $f(0) = 0$, puisque $\lim\limits_{x \to 0} x \ln(x) = 0$ (croissance comparée).

Définition 9. Soit I un intervalle et k un réel strictement positif. Une fonction f est k**-Lipschitzienne** sur I si, $\forall (x, y) \in I^2$, $|f(y) - f(x)| \leqslant k|y - x|$. La fonction f est **Lipschitzienne** si elle est k-Lipschitzienne pour un certain réel k. Une fonction k-Lipschitzienne pour une valeur de k strictement inférieure à 1 est dite **contractante**.

Proposition 6. La somme de deux fonctions Lipschitziennes est Lipschitzienne. La composée de deux fonctions Lipschitzienne est Lipschitzienne. Si f est Lipschitzienne sur I et sur J, avec $I \cap J \neq \emptyset$, alors f est Lipschitzienne sur $I \cup J$.

Remarque 9. Attention, le produit de deux fonctions Lipschitziennes n'est par contre en général pas Lipschitzien.

Démonstration.

- Supposons donc f et g Lipschitziennes (avec des coefficients respectifs k et k' non nécessairement égaux) sur un même intervalle I. On peut alors utiliser l'inégalité triangulaire pour affirmer que $|(f+g)(y)-(f+g)(x)| \leqslant |f(y)-f(x)|+|g(y)-g(x)| \leqslant k|y-x|+k'|y-x| \leqslant (k+k')|y-x|$. La fonction $f+g$ est donc $(k+k')$-Lipschitzienne sur I.
- C'est encore plus simple pour la composée : si f est k-Lipschitzienne sur I et g est k'-Lipschitzienne sur $f(I)$, alors $|g(f(y)) - g(f(x))| \leqslant k'|f(y) - f(x)| \leqslant k'k|y - x|$, donc $g \circ f$ est kk'-Lipschitzienne sur I.
- Supposons donc f k-Lipschitzienne sur I et k'-Lipschitzienne sur J. Si on considère deux réels x et y appartenant tous les deux à I ou à J, on peut majorer $|f(y)-f(x)|$ par $k|y-x|$ ou $k'|y-x|$ respectivement. Prenons désormais $x \in I$ et $y \in J$, et choisissons un réel $z \in I \cap J$ tel que $x < z < y$ (un tel réel existe nécessairement, faites un dessin), alors par inégalité triangulaire $|f(y)-f(x)| \leqslant |f(y)-f(z)|+|f(z)-f(x)| \leqslant k|y-z|+k'|z-x| \leqslant \max(k,k')(|y-z|+|z-x|) \leqslant \max(k,k')|y-x|$. La fonction f est donc $\max(k,k')$-Lipschitzienne sur $I \cup J$.

□

Proposition 7. Une fonction Lipschitzienne sur un intervalle I est continue sur I.

Démonstration. C'est une conséquence du théorème des gendarmes : $0 \leqslant |f(x) - f(a)| \leqslant k|x-a|$. Si on suppose que x tend vers a, les deux extrêmes ont pour limite 0, donc $\lim_{x \to a} |f(x) - f(a)| = 0$, soit $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. □

2 Comparaison de fonctions

Attention, dans cette partie, nous allons atteindre des sommets inégalités de paresse de la part de votre professeur de maths préféré c'est très simple, pour tout ce qui est négligeabilité et équivalents, les fonctions, c'est comme les suites, reportez-vous donc à la partie correspondante du chapître sur les suites ! Bon, tout de même une remarque importante : quanf on travaille avec des fonctions, il est absolument indispensable de bien préciser vers quoi x va tendre pour qu'un équivalent ou une négligeabilité soit valable. Ainsi, on peut écrire $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$ (équivalent classique vu dans le chapître sur les suites, mais par contre $\ln(1+x) \underset{+\infty}{\sim} \ln(x)$ (ce qui n'est pas une conséquence directe des résultats du cours puisqu'on ne peut toujours pas composer des équivalents, mais ça se démontre facilement). Pour le reste, les définitions et propriétés sont identiques (y compris bien sûr les résultats essentiels de croissance comparée, de toute façon déjà énoncés dans le chapître sur les fonctions usuelles). Pour ne pas avoir un paragraphe complètement vide, je vais ajouter un petit équivalent à la liste des équivalents classiques :

Proposition 8. $(1+x)^\alpha - 1 \underset{0}{\sim} \alpha x$.

Démonstration. Posons $f(x) = (1+x)^\alpha$, alors $f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$. Le taux d'accroissement de la fonction en 0 vaut $\dfrac{(1+x)^\alpha - 1}{x}$ et tend vers $f'(0) = \alpha$, donc $(1+x)^\alpha - 1 \underset{0}{\sim} \alpha x$. □

Bon, allez, pour remplir encore un peu, une fois n'est pas coutume, un petit exercice glissé au milieu du cours :
Exercice : Calculer les limites suivantes :

1. $\lim \dfrac{x^2+|x|}{x^2-|x|}$ en -1, 1, 0, $+\infty$, $-\infty$
2. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin(x)-\cos(x)}{x-\frac{\pi}{4}}$
3. $\lim \dfrac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x^2+x+3}-\sqrt{2x+5}}$ en 2 et en $+\infty$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$
5. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(x^2)}{x^3-1}$

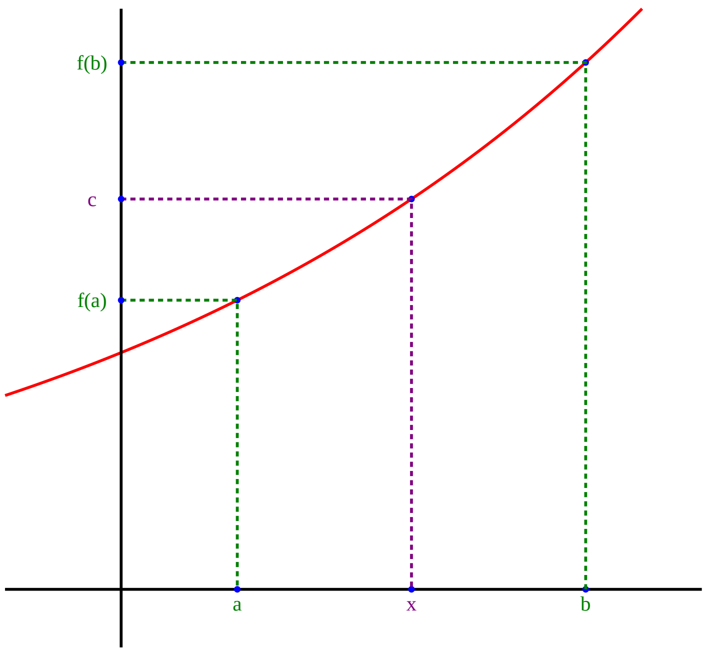
Corrigé :

1. Posons $f(x)=\dfrac{x^2+|x|}{x^2-|x|}$. Une façon simple d'écrire les choses est de dire que, si $x\geqslant 0$, $f(x)=\dfrac{x^2+x}{x^2-x}$, et si $x\leqslant 0$, $f(x)=\dfrac{x^2-x}{x^2+x}$. On en déduit facilement, par exemple à coups d'équivalents) que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=1$. Si $x>0$ et $x\neq 1$, $f(x)=\dfrac{x(x+1)}{x(x-1)}=\dfrac{x+1}{x-1}$, donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-1$. De même, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x-1}{x+1}=-1$, donc finalement $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-1$. Enfin, des calculs directs donnent $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=+\infty$. on pouvait aussi constater que la fonction f était paire pour éviter une partie des calculs.
2. On reconnait le taux d'accroissement de la fonction sinus en $\dfrac{\pi}{4}$, la limite vaut donc $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
3. Bien sûr, numérateur et dénominateur tendent vers 0 quand x tend vers 2. N'oublions pas nos classiques et multiplions par la quantité conjuguée : $\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x^2+x+3}-\sqrt{2x+5}}=\dfrac{x+2-4}{\sqrt{x+2}+2}\times\dfrac{\sqrt{x^2+x+3}+\sqrt{2x+5}}{x^2+x+3-(2x+5)}=\dfrac{(x-2)(\sqrt{x^2+x+3}+\sqrt{2x+5})}{(\sqrt{x+2}+2)(x^2-x-2)}$. On constate facilement que $x^2-x-2=(x-2)(x+1)$ (on sait que ça s'annule en 2 et l'autre racin est évidente), par ailleurs les sommes de racines ont une limite finie, on peut les remplacer par des équivalents, donc $\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x^2+x+3}-\sqrt{2x+5}}\underset{2}{\sim}\dfrac{6(x-2)}{4(x+1)(x-2)}\sim\dfrac{3}{2(x+1)}\sim\dfrac{3}{4}$. La limite recherchée vaut donc $\dfrac{3}{4}$.
   En $+\infty$, inutile de s'embêter autant, on peut prendre des équivalents dans les racines carrées, en faisant quand même attention à ne pas additionner des équivalents : $\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x^2+x+3}-\sqrt{2x+5}}\underset{+\infty}{=}\dfrac{\sqrt{x}+o(\sqrt{x})}{x+o(x)-\sqrt{2x}+o(\sqrt{x})}\sim\dfrac{\sqrt{x}}{x}\sim\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, qui a bien entendu pour limite 0 en $+\infty$.
4. Un classique : $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e^{x\ln(1+\frac{1}{x})}$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$, on peut écrire $\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\sim\dfrac{1}{x}$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=1$, puis $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e^1=e$.
5. Un peu plus rigolo : $\dfrac{\ln(x^2)}{x^3-1}=\dfrac{2\ln(x)}{(x-1)(x^2+x+1)}$. Il suffit alors de se rappeler que $\ln(X)\underset{1}{\sim}X-1$ (c'est le classique $\ln(1+x)\underset{0}{\sim}x$ en posant $X=1+x$) pour obtenir $\dfrac{\ln(x^2)}{x^3-1}\underset{1}{\sim}\dfrac{2}{x^2+x+1}$, qui a donc pour limite $\dfrac{2}{3}$.

3 Propriétés globales

Cette dernière partie sera simplement consacrée à un alignement de gros théorèmes fondamentaux pour la compréhension de la notion de continuité, à commencer par le plus célèbre d'entre eux :

Théorème 4. Théorème des valeurs intermédiaires.
Soit f une fonction continue sur le segment $[a;b]$ et c un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$, alors il existe un réel $x \in [a;b]$ tel que $f(x) = c$.



Remarque 10. Quoi que veuillent bien en dire des générations d'élèves, le théorème des valeurs intermédiaires ne garantit pas le moins du monde l'unicité du réel x, c'est un simple théorème d'existence. Si on doit prouver qu'une équation du type $f(x) = c$ admet une solution unique sur un intervalle, ce n'est donc pas lui qu'il faut invoquer, mais son cousin le théorème de la bijection (que nous allons revoir plus bas).

Démonstration. Considérons pour simplifier que $f(a) \leqslant f(b)$, et notons $E = \{x \in [a;b] \mid f(x) \leqslant c\}$. L'ensemble E est majoré par b, et non vide puisqu'il contient a (par hypothèse, $f(a) \leqslant c \leqslant f(b)$), il a donc une borne supérieure que nous allons noter avec beaucoup d'à propos x. En effet, on va prouver que $f(x) = c$ (ce qui prouvera le théorème !). Commençons par appliquer la caractérisation de la borne supérieure : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists y \in [x - \varepsilon; x]$, $y \in E$. En prenant par exemple $\varepsilon = \dfrac{1}{n}$, on peut trouver un y_n dans $\left[x - \dfrac{1}{n}; x\right]$ tel que $f(y_n) \leqslant c$. La fonction étant continue, on peut passer à la limite pour obtenir $f(x) \leqslant c$ (par construction, la suite (y_n) converge vers x). De l'autre côté, c'est encore plus simple : $\forall n \in \mathbb{N}$, $f\left(x + \dfrac{1}{n}\right) > 0$ (sinon x ne serait pas un majorant de E), on peut à nouveau passer à la limite pour obtenir cette fois $f(x) \geqslant c$. Conclusion : on a bien $f(x) = c$. Pour être tout à fait rigoureux, il y a de petites difficultés si $x = a$ ou $x = b$, aue nous esquiverons pour nous concentrer sur les idées principales de la preuve. $\square$

Corollaire 1. L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Exemple : Soit f une fonction continue sur $[0;1]$ et à valeurs dans $[0;1]$, alors f admet forcément un point fixe. En effet, si on pose $fg(x) = f(x) - x$, la fonction g est certainement continue, $g(0) =$

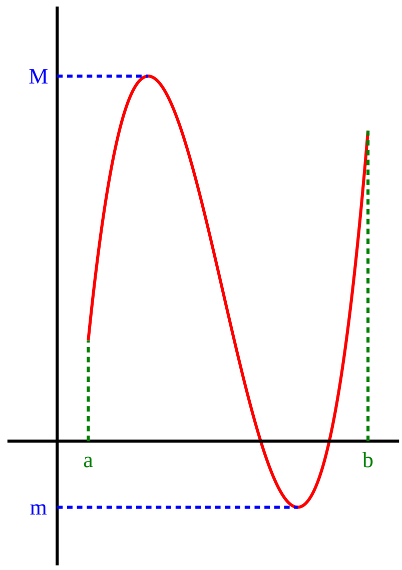
$f(0) \geqslant 0$, et $g(1) = f(1) - 1 \leqslant 0$ puisque $f(1) \leqslant 1$. Le réel 0 est donc compris entre $g(0)$ et $g(1)$, on peut appliquer le théorème des valeurs intermédiaires pour affirmer l'existence d'un réel x tel que $g(x) = 0$, c'est-à-dire $f(x) = x$. Ce résultat garantit l'existence d'un point fixe sur tout intervalle stable (les valeurs 0 et 1 sont accessoires) d'une fonction continue.

Démonstration. En effet, un intervalle est simplement un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ qui contient tous les réels contenus entre deux de ses éléments. Le théorème des valeurs intermédiaires assure exactement celà pour l'image d'un intervalle par une fonction continue. □

Remarque 11. La nature (ouvert, fermé, borné) de l'intervalle image n'est pas toujours la même que celle de l'intervalle de départ. Par exemple, si $f(x) = x^2$, $f([-2;1[) = [0;4]$. Si f est la fonction inverse, $f([1;+\infty[) =]0;1]$.

Remarque 12. Rappelons que le théorème des valeurs intermédiaires est un outil fondamental pour la mise en place de la méthode de dichotomie vue dans le chapître sur les suites.

Théorème 5. Théorème du maximum.
L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.



Remarque 13. Autrement dit, une fonction continue sur un segment atteint son minimum et son maximum. Ce résultat ressemble énormément au précédent, et pourtant il est plus profond, et ne se démontre pas uniquement à l'aide du théorème des valeurs intermédiaires. D'ailleurs, je ne donne la démonstration qu'à titre indicatif, puisqu'elle est hors-programme, faisant intervenir le théorème de Bolzano-Weierstraß.

Démonstration. Soit donc une fonction f définie et continue sur un segment $[a;b]$. Commençons par prouver que f est bornée sur $[a;b]$. Supposons par l'absurde qu'elle n'est par exemple pas majorée. Il existe alors, pour tout entier naturel n, un réel x_n dans l'intervalle $[a;b]$ tel que $f(x_n) \geqslant n$. La suite (x_n) étant bornée, elle admet, d'après le théorème de Bolzano-Weierstraß, une sous-suite y_n convergeant vers un réel c. Par continuité de f, on devrait donc avoir $\lim\limits_{n \to +\infty} f(y_n) = f(c)$. Or, $f(x_n) \geqslant n$ implique $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = +\infty$, et de même pour la sous-suite $(f(y_n))$. C'est contradictoire, la fonction est donc nécessairement majorée. Notons alors $M = \sup_{[a;b]} f$. Par caractérisation de la borne supérieure, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x \in [a;b]$, $f(x) \geqslant M - \varepsilon$. En particulier, en posant $\varepsilon = \dfrac{1}{n}$, on trouve un réel x_n (rien à voir avec le x_n de la première partie de la démonstration) pour lequel

$f(x_n) \geqslant M - \dfrac{1}{n}$. Comme précédemment, on peut en extraire une sous-suite convergeante (y_n) telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} f(y_n) = M$ (puisque $M - \dfrac{1}{n} \leqslant f(y_n) \leqslant M$). Si on note c la limite de (y_n), par continuité de la fonction f, on aura $f(x) = M$. Le maximum est donc bien atteint. C'est évidemment pareil pour le minimum. □

Théorème 6. Théorème de la bijection.
Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I. Alors f est bijective de I vers $J = f(I)$ et sa réciproque g est continue et strictement monotone (de même monotonie que f) sur J.

Démonstration. Supposons f croissante (l'autre cas est très similaire). On sait déjà que $f(I)$ est un intervalle, et de plus f est injective car strictement monotone, donc bijective sur son image. La fonction g est donc bien définie sur J. De plus, si y et y' sont deux éléments de J tels que $y < y'$, on a $y = f(x)$ et $y' = f(x')$, avec $x < x'$, donc $g(y) = x < x' = g(y')$ et g est strictement croissante. Enfin, soit $y \in J$, $x = g(y)$ et $\varepsilon > 0$ (et tel que $[x - \varepsilon; x + \varepsilon] \subset I$, sinon il n'y a pas de problème). Notons $y_1 = g(x - \varepsilon)$, $y_2 = f(x + \varepsilon)$. Posons $\eta = \min(y - y_1; y_2 - y)$. On a alors $[y - \eta; y + \eta] \subset [y_1; y_2]$, donc par croissance de g, $g([y - \eta; y + \eta]) \subset [x - \varepsilon; x + \varepsilon]$. Ceci prouve la continuité de g en y. □