Coniques

PTSI B Lycée Eiffel

4 décembre 2012

À quoi sert une hyperbole ?
À boire de l'hypersoupe !

L'homme n'est pas un cercle à un seul centre ; c'est une ellipse à deux foyers. Les faits sont l'un, les idées sont l'autre.

Victor HUGO (uniquement pour la citation, pas pour la blague).

Introduction

Ce dernier chapitre de la première période de PTSI est consacré à l'étude des coniques, qui nous verra faire quelques allusions à d'autres domaines étudiés en ce début d'année : un peu de courbes paramétrées, pas mal de géométrie, mais assez peu d'équations différentielles, alors que ces courbes ont pourtant une grande utilité en physique en tant que trajectoires d'astres (et donc comme solutions d'équation différentielles). Nous nous contenterons d'en faire une étude géométrique sommaire dans ce chapitre, en en donnant donc des définitions géométriques. Notons qu'assez curieusement, les sections planes de cônes, qui sont à l'origine de leur dénomination, ne seront même pas évoquées dans ce chapitre sur les coniques.

Objectifs du chapitre :

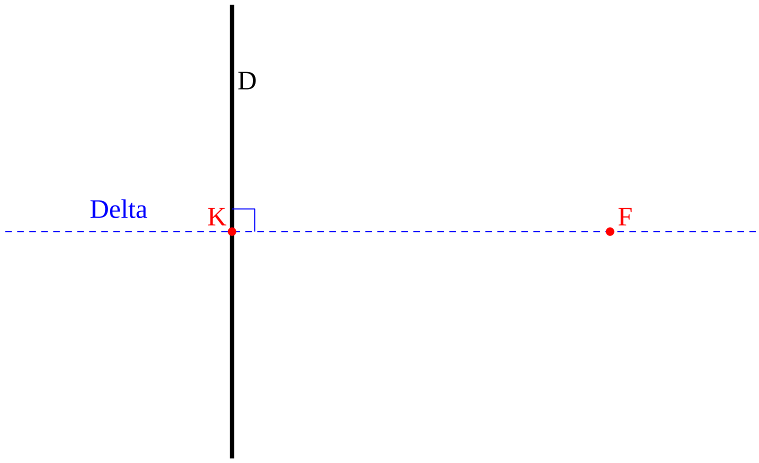
- connaissance des différentes définitions des coniques, et des liens entre tous leurs paramètres géométriques
- capacité à déterminer une équation réduite de conique à partir d'une équation algébrique du second degré

1 Définition monofocale des coniques

1.1 Équations cartésienne et polaire

Définition 1. Soit D une droite du plan, F un point du plan n'appartenant pas à la droite D, et e un réel strictement positif. La **conique** de **directrice** D et de **foyer** F est l'ensemble des points M du plan vérifiant l'égalité $d(M, F) = ed(M, D)$.

Définition 2. La droite perpendiculaire à la directrice passant par le foyer est appelée **axe focal** de la conique (habituellement noté Δ). Cet axe est toujours un axe de symétrie de la conique. En notant d la distance du foyer à la directrice, on appelle **paramètre** de la conique le réel $p = de$.



Définition 3. Une conique d'excentricité e est appelée **parabole** si $e = 1$, **ellipse** si $0 < e < 1$, et **hyperbole** si $e > 1$.

Proposition 1. Dans le repère orthonormal ayant pour origine F et pour base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, où $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ sont des vecteurs directeurs respectifs de Δ (dans le sens de $\overrightarrow{KF}$) et de D, la conique a pour équation $x^2 + y^2 = e^2(x + d)^2$.

Démonstration. En effet, dans ce repère, si on prend un point $M(x, y)$ quelconque du plan, $d(M, F)^2 = x^2 + y^2$ et $d(M, D) = (x + d)^2$ pusique la directrice a alors pour équation $x = -d$. □

Proposition 2. Dans le même repère que pour la proposition précédente, la conique a pour équation polaire $r = \dfrac{p}{1 - e\cos(\theta)}$. Plus généralement, dans un repère centré sur le foyer et dans lequel la directrice a pour équation $r = \dfrac{d}{\cos(\theta - \theta_0)}$, la conique aura pour équation $r = \dfrac{p}{1 + e\cos(\theta - \theta_0)}$.

Démonstration. Reprenons l'équation obtenue dans la proposition précédente, et passons-la en coordonnées polaires : $r^2 = e^2(r\cos(\theta) + d)^2$, soit $r = \pm e(r\cos(\theta) + d)$, ce qui donne $r_1 = \dfrac{ed}{1 - e\cos(\theta)}$, ou $r_2 = \dfrac{-ed}{1 + e\cos(\theta)}$. Seule la première équation correspond à celle annoncée dans notre proposition, mais la deuxième correspond en fait à la même courbe plane, car $r_2(\theta + \pi) = -r_1(\theta)$, ce qui correspond au même point. Cette équation est bien un cas particulier de l'équation générale (dont nous ne ferons pas le détail de la preuve), dans le cas où $\theta_0 = \pi$. □

1.2 Parabole

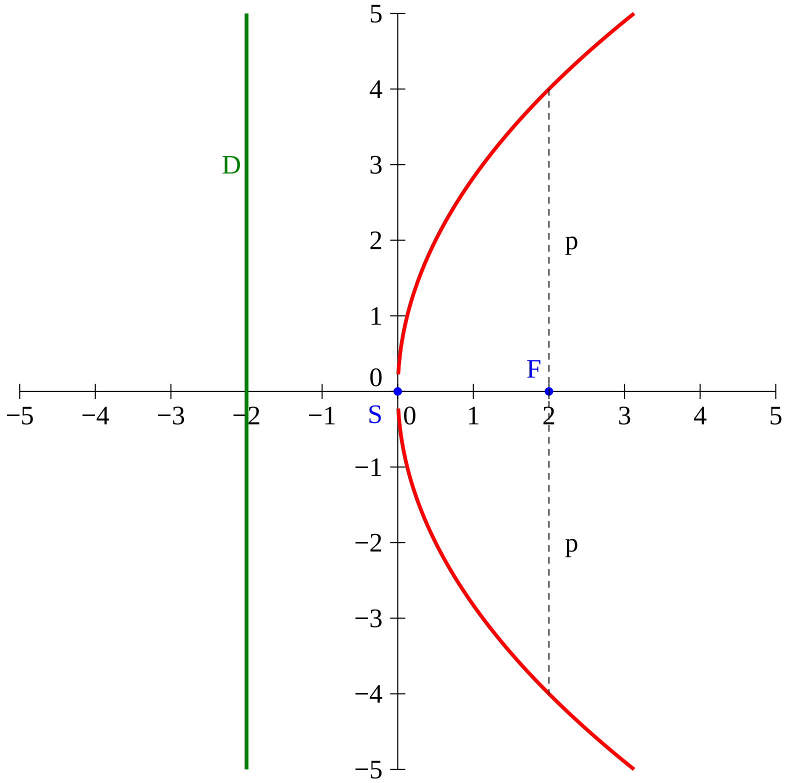
Remarque 1. La parabole possède un seul point situé sur son axe focal, qui coïncide avec le milieu du segment $[FK]$ (où K, conformément à la figure réalisée ci-dessus, est le projeté orthogonal de F sur D). Ce point est noté S et appelé **sommet** de la parabole.

Démonstration. En effet, dans le cas de la parabole, l'excentricité étant égale à 1, l'équation se réduit à $d(M, D) = d(M, F)$. Si on place le point M sur l'axe focal, on aura $d(M, D) = MK$, donc le milieu de $[FK]$ est le seul point de l'axe focal appartenant à la parabole. □

Théorème 1. Dans le repère orthonormal ayant pour origine S et pour base $(\vec{i}, \vec{j})$ (les mêmes que précédemment), la parabole a pour équation $y^2 = 2px$. Cette équation est appelée **équation réduite** de la parabole. Réciproquement, la courbe d'équation $y^2 = 2px$ dans un repère orthonormal est une parabole de sommet O, de foyer $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ et de directrice D d'équation $x = -\frac{p}{2}$.

Démonstration. Dans ce repère, le foyer a pour coordonnées $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ et la directrice a pour équation $x = -\frac{p}{2}$. Si on considère un point $M(x, y)$, on a donc $d(M, D) = x + \frac{p}{2}$, et $d(M, F) = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}$. En élevant tout au carré (ce sont des distances positives), le point appartient à la parabole si $x^2 + px + \frac{p^2}{4} = x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2$, soit $y^2 = 2px$. La réciproque est immédiate, tous les calculs effectués étant des équivalences. □

Remarque 2. Les points de la parabole ayant pour abscisse $x = \frac{p}{2}$ (même abscisse que le foyer) ont pour ordonnée $\pm p$. En effet, si $x = \frac{p}{2}$, $y^2 = 2p \times \frac{p}{2} = p^2$.



Proposition 3. La parabole peut être paramétrée par les équations $\begin{cases} x(t) & = & \frac{pt^2}{2} \\ y(t) & = & pt \end{cases}$.

Démonstration. On constate aisément que ce paramétrage vérifie $y^2 = 2px$, puis $y^2 = p^2t^2 = 2p \times \frac{pt^2}{2}$. De plus, avec ce paramétrage, y prend exactement une fois chaque valeur dans $\mathbb{R}$, et la parabole a un unique point sur chaque droite horizontale, donc tous les points de la parabole sont bien décrits. □

Proposition 4. La tangente à la parabole en un point $M(x_M, y_M)$ a pour équation $yy_M = p(x + x_M)$.

Démonstration. Passons par l'équation paramétrique. On calcule aisément $x'(t) = pt$ et $y'(t) = p$, donc la tangente au point M est dirigée par le vecteur de coordonnées (y_M, p). Un vecteur normal à la tangente est alors $(p, -y_M)$. Comme cette tangente passe par le point M, elle a pour équation $p(x - x_M) - y_M(y - y_M) = 0$, soit $yy_M = y_M^2 + p(x - x_M)$. Le point M appartenant à la parabole, $y_M^2 = 2px_M$, et on trouve bien l'équation $yy_M = p(x + x_M)$. □

1.3 Ellipse

Remarque 3. L'ellipse possède deux points A et A' sur son axe focal, appelés **sommets** de l'ellipse. En notant O le milieu du segment $[AA']$ (point qu'on appellera **centre** de l'ellipse), F' le symétrique de F par rapport à O (deuxième **foyer** de l'ellipse), et D' la droite symétrique de D par rapport à O (deuxième **directrice** de l'ellipse) ; en posant $a = OA$ et $c = OF$, alors on a les relations $a = \dfrac{de}{1-e^2}$, $e = \dfrac{c}{a}$, et $OK = c + d = \dfrac{a^2}{c}$.

Démonstration. En reprenant le schéma général effectué plus haut, on ne peut pas avoir de points de l'ellipse sur l'axe focal qui ne soient pas du même coté de la directrice que le foyer, car ces points ont une distance au foyer supérieure à celle à la directrice, donc ne peuvent vérifier l'équation $d(M, D) = ed(M, F)$, avec $e < 1$. Par contre, il existe un point de l'ellipse sur le segment $[FK]$: si on le note A, on doit avoir $AK + AF = FK = d$, et $d(A, F) = AF = eAK$, donc $AK(1 + e) = d$, soit $AK = \dfrac{d}{1+e}$ et $AF = \dfrac{de}{1+e}$ (ce qui correspond bien à un point situé à gauche de F) ; il existe un deuxième point sur l'axe focal à droite du foyer, qu'on va noter A'. Il vérifie cette fois $A'K - A'F = d$, et $A'F = eA'K$, soit $A'K = \dfrac{d}{1-e}$ (qui correspond bien à un point à droite de F avec $0 < e < 1$). On calcule ensuite $AA' = AF + A'F = \dfrac{de}{1+e} + \dfrac{de}{1-e} = \dfrac{de(1-e) + de(1+e)}{1-e^2} = \dfrac{2de}{1-e^2}$, donc $a = OA = OA' = \dfrac{1}{2}AA' = \dfrac{de}{1-e^2}$; $c = OF = OA - AF = \dfrac{de}{1-e^2} - \dfrac{de}{1+e} = \dfrac{de(1-1+e)}{1-e^2} = \dfrac{de^2}{1-e^2} = ae$, soit $e = \dfrac{c}{a}$. Enfin, $OK = OA + AK = \dfrac{ed}{1-e^2} + \dfrac{d}{1+e} = \dfrac{ed + d - de}{1-e^2} = \dfrac{d}{1-e^2} = \dfrac{a}{e} = \dfrac{a^2}{c}$. □

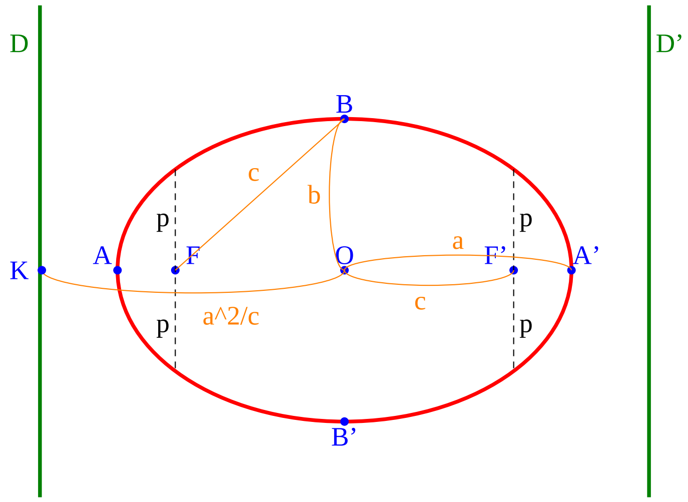
Théorème 2. Dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ (les vecteurs de base n'ont toujours pas changé), l'ellipse admet pour équation $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, où on a posé $b = \sqrt{a^2 - c^2}$. Les foyers ont pour coordonnées $(\pm c; 0)$ et les directrices pour équations $x = \pm\dfrac{a^2}{c}$. Réciproquement, une telle **équation réduite** est celle d'une ellipse dont les foyers et les directrices ont les coordonnées et équations indiquées.

Démonstration. Soit $M(x, y)$ un point du plan. Dans ce repère, au vu des calculs préliminaires, on a $MF^2 = (x - c)^2 + y^2$, et $d(M, D) = x + \dfrac{a^2}{c}$, donc en élevant tout au carré, M appartient à l'ellipse si $x^2 - 2cx + x^2 + y^2 = \dfrac{c^2}{a^2}\left(x^2 + 2\dfrac{a^2}{c}x + \dfrac{a^2}{c^2}\right)$, soit $x^2 + 2cx + c^2 + y^2 - \dfrac{c^2}{a^2}x^2 - 2cx = a^2$, ou encore $x^2\left(1 - \dfrac{c^2}{a^2}\right) + y^2 = a^2 - c^2$. Pour trouver l'équation réduite, on divise par $a^2 - c^2$, et on trouve $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$. Il suffit donc de poser $b^2 = a^2 - c^2$, ce qui est possible puisque $a > c$. □

Remarque 4. L'ellipse coupe l'axe des ordonnées (qui est également axe de symétrie) en deux points B et B' appelées **sommets** de l'ellipse (qui en a donc quatre) de coordonnées $(0, b)$ et $(0, -b)$. Les points de l'ellipse de même abscisses que les foyers (donc $\pm c$) ont pour ordonnée $\pm p$.

Démonstration. Pour les deux derniers sommets, c'est évident, prendre $x = 0$ dans l'équation réduite de l'ellipse donne $y^2 = b^2$. Pour $x = \pm c$, on obtient cette fois $\dfrac{c^2}{b^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, soit $\dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{b^2 - c^2}{b^2} = \dfrac{a^2}{b^2}$. On obtient donc $y = \pm\dfrac{b^2}{a}$. Or, $p = de = a(1 - e^2) = a\left(1 - \dfrac{c^2}{a^2}\right) = \dfrac{b^2}{a}$. □

Définition 4. Le réel a est appelé **demi-grand axe** de l'ellipse, le réel b **demi-petit axe**. Le réel c est la **demi-distance focale** de l'ellipse.



Proposition 5. On peut paramétrer l'ellipse par les équations $\begin{cases} x(t) & = & a\cos(t) \\ y(t) & = & b\sin(t) \end{cases}$, où $t \in]-\pi; \pi]$.

Démonstration. On reconnait une paramétrisation très proche de celle du cercle. On vérifie aisément qu'avec le parémétrage choisi, on a $\dfrac{x(t)^2}{a^2} + \dfrac{y(t)^2}{b^2} = 1$, et tous les points de l'ellipse sont atteints une unique fois pour une valeur de t entre $-\pi$ et π. □

Proposition 6. La tangente à l'ellipse en son point $M(x_M, y_M)$ a pour équation $\dfrac{xx_M}{a^2} + \dfrac{yy_M}{b^2} = 1$.

Démonstration. Passons à nouveau par le paramétrage, on a $x'(t) = -a\sin(t)$ et $y'(t) = b\cos(t)$, donc la tangente a pour vecteur normal $(b\cos(t), a\sin(t))$, et pour équation $b\cos(t)(x - a\cos(t)) + a\sin(t)(y - b\sin(t)) = 0$, soit $b\cos(t)x + a\sin(t)y = ab$. En divisant tout par ab, on trouve donc $x\dfrac{\cos(t)}{a} + y\dfrac{\sin(t)}{b} = 1$, ou encore $\dfrac{xx_M}{a^2} + \dfrac{yy_M}{b^2} = 1$. □

Les ellipses n'étant au fond qu'une version un peu dégénérée des cercles, on peut les voir apparaitre dans d'autres contextes.

Définition 5. Une **affinité** de centre O, de rapport k dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ est une application du plan dans lui-même associant au point de coordonnées (x, y) dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, le point de coordonnées (x, ky). Autrement dit, une affinité effectue une homothétie sur un seul des deux axes du repère, mais ne touche pas à ce qui se passe sur l'autre.

Proposition 7. L'image d'un cercle de rayon R centré en O par une affinité dans la base orthonormale $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ est une ellipse de demi-grand axe R et de demi-petit axe kR (si $0 \leqslant k \leqslant 1$).

Proposition 8. La projection orthogonale d'un cercle de rayon R dans l'espace sur un plan non perpendiculaire au plan le contenant, est une ellipse dont le centre est le projeté orthogonal du centre du cercle, de demi-grand axe R et de demi-petit axe $R\cos(\alpha)$, où α représente l'angle entre les deux plans.

Démonstration. Nous admettrons ces deux propriétés annexes, qui sont assez intuitives mais un peu techniques à prouver. □

1.4 Hyperbole

Remarque 5. Tout comme l'ellipse, l'hyperbole possède deux points sur son axe focal, situés de part et d'autre de sa directrice. On utilisera les mêmes notations que pour les ellipses : F et F' pour les deux foyers, A et A' pour les sommets, D et D' pour les directrices, O pour le centre. Avec ces notations, on a les relations $a = \dfrac{de}{e^2-1}$; $e = \dfrac{c}{a}$ et $OK = \dfrac{a^2}{c}$.

Démonstration. Les calculs étant exactement les mêmes que dans le cas de l'ellipse à des petits changemets de signe près, ils seront laissés en exercice au lecteur. □

Théorème 3. Dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, l'hyperbole admet pour équation $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, où on a posé $b = \sqrt{c^2 - a^2}$. Les foyers ont pour coordonnées $(\pm c; 0)$ et les directrices pour équations $x = \pm\dfrac{a^2}{c}$. Réciproquement, une telle **équation réduite** est celle d'une hyperbole dont les foyers et les directrices ont les coordonnées et équations indiquées.

Proposition 9. On peut paramétrer l'hyperbole par les équations $\begin{cases} x(t) &= \pm a\cosh(t) \\ y(t) &= b\sinh(t) \end{cases}$, où $t \in \mathbb{R}$. Plus précisément, si $x(t) = a\cosh(t)$, on obtient une des branches de l'hyperbole, et on retrouve l'autre avec $x(t) = -a\cosh(t)$.

Démonstration. La paramétrage est proche de celui de l'ellipse, et découle de la relation $\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1$. Par contre, on ne trouvera que des valeurs de x supérieures à a en prenant $x(t) = a\cosh(t)$, d'où la nécessité d'un paramétrage pour chaque branche de l'hyperbole. □

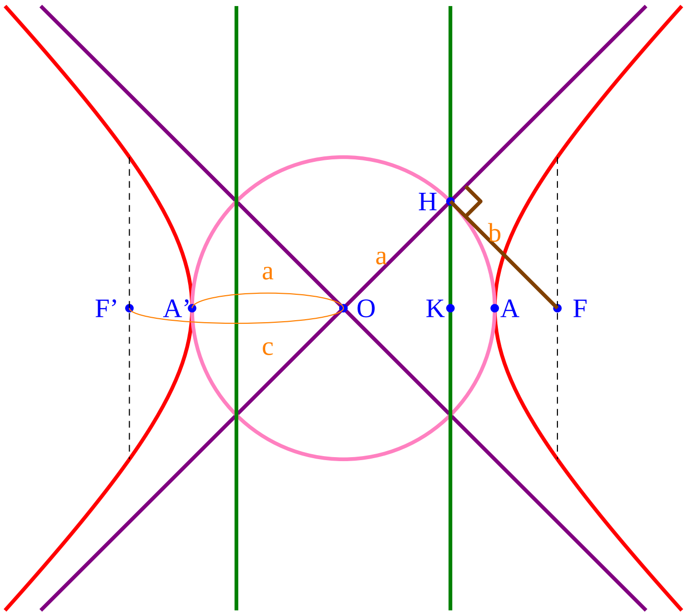
Proposition 10. L'hyperbole admet deux asymptotes obliques d'équation $y = \dfrac{b}{a}x$ et $y = -\dfrac{b}{a}x$. Ces asymptotes se coupent au centre de l'hyperbole, et son symétriques par rapport à chacun des deux axes.

Démonstration. Faisons le calcul pour une des deux branches, par exemple celle où $x(t) = a\cosh(t)$. On étudie la branche infinie quand t tend vers $+\infty$: $\dfrac{y(t)}{x(t)} = \dfrac{a\sinh(t)}{b\cosh(t)} = \dfrac{a(e^t - e^{-t})}{b(e^t + e^{-t})}\dfrac{a}{b}\dfrac{1-e^{-2t}}{1+e^{-2t}}$ en factorisant par e^t des deux côtés, d'où une limite égale à $\dfrac{a}{b}$. On calcule alors $y(t) - \dfrac{b}{a}x(t) = b(\sinh(t) - \cosh(t)) = -2be^{-t}$, qui a une limite nulle en $+\infty$. On trouve donc une asymptote oblique d'équation $y = \dfrac{b}{a}x$. On effectue des calculs très similaires (ou on invoque des propriétés de symétrie) pour déterminer les asymptotes en $-\infty$ et sur l'autre branche. □

Remarque 6. La distance des foyers de l'hyperbole à chacune de ses asymptotes vaut b. Le projeté orthogonal H du foyer F sur l'asymptote d'équation $y = \dfrac{b}{a}x$ (et de même pour les autres projetés) est à distance a de l'origine. De plus, le point H est situé sur la directrice D. Enfin, les points d'abscisse $\pm c$ sur l'hyperbole ont pour ordonnée $\pm p$.

Démonstration. On peut utiliser la distance d'un point à une droite : en notant $\mathcal{A}$ l'asymptote d'équation $bx - ay = 0$, $d(F, \mathcal{A}) = \dfrac{|bc|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \dfrac{bc}{c} = b$. Le triangle OHF étant alors rectangle en H, on a $OH^2 = OF^2 - FH^2 = c^2 - b^2 = a^2$, d'où $OH = a$. L'aire du triangle OHF vaut $\dfrac{1}{2}ab$, mais également $\dfrac{1}{2}cy_H$, donc $y_H = \dfrac{ab}{c}$. Comme H appartient à l'asymptote $\mathcal{A}$, on en déduit que

$x_H = \dfrac{a}{b} \times y_H = \dfrac{a^2}{c}$, ce qui prouve que le point H appartient bien à la directrice. Enfin, pour les points d'abscisse $\pm c$, c'est très similaire au cas de l'ellipse, on a alors $y\dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{c^2}{a^2} - 1 = \dfrac{b^2}{a^2}$, donc $y = \pm\dfrac{b^2}{a}$, qui coïncide toujours avec la valeur du paramètre p. □



Proposition 11. La tangente à l'hyperbole en son point $M(x_M, y_M)$ a pour équation $\dfrac{xx_M}{a^2} - \dfrac{yy_M}{b^2} = 1$.

Démonstration. Ce dernier calcul est également laissé en exercice au lecteur. □

2 Définition bifocale des coniques

On peut également définir les coniques à centre (mais pas les paraboles) de façon géométrique en utilisant les deux foyers.

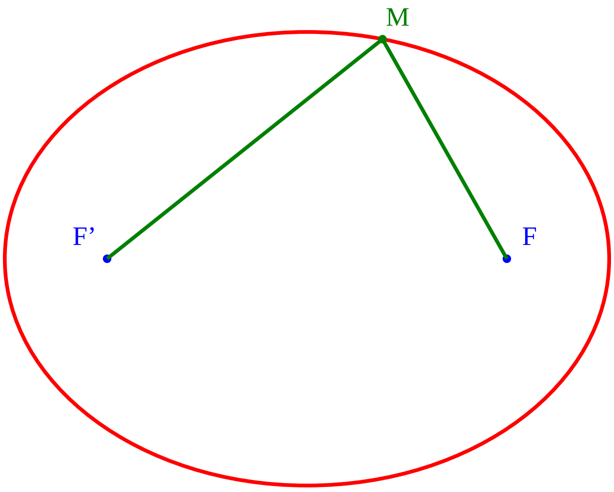
Théorème 4. Soient F et F' deux points distincts du plan vérifiant $FF' = 2c$ et a un réel strictement positif.

- Si $a > c$, l'ensemble des points M du plan vérifiant $MF + MF' = 2a$ est une ellipse dont les deux foyers sont F et F', de demi-distance focale c et de demi-grand axe a.
- Si $a < c$, l'ensemble des points M du plan vérifiant $|MF - MF'| = 2a$ est une hyperbole dont les deux foyers sont F et F', de demi-distance focale c et de demi axe a.

Démonstration. Les deux preuves étant extraordinairement similaires, on se contentera du cas de l'ellipse. On peut toujours se placer dans un repère orthonormal où les points F et F' ont pour coordonnées $(\pm c; 0)$. On a alors, en notant $M(x, y)$ un point du plan, $MF + MF' = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$, on peut écrire les équivalences suivantes :

$$
\begin{aligned}
& MF+MF'=2a \\
\Leftrightarrow\ & (x-c)^2+y^2+(x+c)^2+y^2+2\sqrt{((x-c)^2+y^2)((x+c)^2+y^2)}=4a^2 \\
\Leftrightarrow\ & 2\sqrt{((x-c)^2+y^2)((x+c)^2+y^2)}=4a^2-2x^2-2c^2-2y^2 \\
\Leftrightarrow\ & ((x-c)^2+y^2)((x+c)^2+y^2)=(2a^2-x^2-c^2-y^2)^2 \\
\Leftrightarrow\ & (x^2-c^2)^2+y^2(2x^2+2c^2)+y^4=4a^4+x^4+c^4+y^4-4a^2x^2-4a^2c^2-4a^2y^2+2x^2c^2+2x^2y^2+2c^2y^2 \\
\Leftrightarrow\ & x^4-2x^2c^2+c^4+2y^2x^2+2y^2c^2=4a^4+x^4+c^4-4a^2x^2-4a^2c^2-4a^2y^2+2x^2c^2+2x^2y^2+2c^2y^2 \\
\Leftrightarrow\ & 4a^2x^2-4x^2c^2+4a^2y^2=4a^4-4a^2c^2 \\
\Leftrightarrow\ & x^2\left(\frac{4(a^2-c^2)}{4a^2(a^2-c^2)}\right)+y^2\frac{4a^2}{4a^2(a^2-c^2)}=1 \\
\Leftrightarrow\ & \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1
\end{aligned}
$$

$\square$



3 Courbes algébriques du second degré

Définition 6. Une **courbe algébrique** du second degré est une courbe définie par une équation de la forme $ax^2+bxy+^c y^2+dx+ey+f=0$, où a, b, c, d, e et f sont six réels non tous nuls.

Définition 7. Le **discriminant** d'une courbe algébrique du second degré est le réel $\delta=ac-\frac{b^2}{4}$. Si $\delta=0$, la courbe est dite **de type parabole**, si $\delta>0$, elle est **de type ellipse**, et si $\delta<0$, elle est **de type hyperbole**.

Remarque 7. Cette terminologie ne signifie pas qu'il s'agit nécessairement du type correspondant, comme va le préciser le théorème suivant.

Théorème 5. Une courbe algébrique peut être, selon son discriminant, l'une des choses suivantes :
- si $\delta=0$, soit une parabole, soit deux droites parallèles, soit une droite, soit l'ensemble vide.
- si $\delta>0$, soit une ellipse, soit un point, soit l'ensemble vide.
- si $\delta<0$, soit une hyperbole, soit deux droites sécantes.

Démonstration. L'idée de la preuve, que nous ne ferons pas en détail, est de ramener l'équation initiale à une équation réduite de conique (ou à un cas particulier plus simple). On procède en deux étapes : la première consiste à se débarasser du terme en xy en effectuant une rotation du repère orthonormal (sans en changer l'origine). Autrement dit, on pose $\left\{\begin{array}{rcrcr} x & = & x'\cos(\theta) & - & y'\sin(\theta) \\ y & = & y'\cos(\theta) & + & x'\sin(\theta) \end{array}\right.$, et on choisit la valeur de θ de façon à supprimer le facteur devant $x'y'$ (nous admettrons que c'est toujours possible). On obtient alors une équation intermédiaire de la forme $Ax'^2+Cy'^2+Dx'+Ey'+F=0$. Les constantes sont évidemment différentes de celles de l'équation initiale, mais le discriminant n'a pas changé (autrement dit, $AC = ac - \dfrac{b^2}{4}$). Ce résultat très calculatoire sera également admis.

La deuxième étape consiste désormais à se débarasser des termes Dx' et Ey' (lorsque c'est possible), en effectuant une translation de repère. En fait, on essaye, comme dans le cas d'une factorisation d'équation de cercle, de mettre sous forme canonique. Il faut tout de même distinguer plein de cas :

- si $\delta = 0$, cela signifie que $A = 0$ ou $C = 0$. Si les deux coefficients sont nuls, il reste une équation de la forme $Dx' + Ey' + F = 0$, qui est une équation de droite (éventuelle vide).
- si $A = 0$ mais $C \neq 0$, regardons d'abord le cas où $D = 0$, on se retrouve avec $Cy'^2 + Ey' = -F$, soit $C\left(y' + \dfrac{E}{2C}\right)^2 = -F - \dfrac{E^2}{4C}$. Autrement dit, pour une certaine constante k et en appelant Y ce qui se trouve dans la parenthèse, on a $Y^2 = k$. Si $k < 0$, notre courbe est vide, si $k = 0$, on trouve une unique droite, et si $k > 0$, on aura deux droites parallèles (horizontales dans le dernier repère).
- si $D \neq 0$, on ramène l'équation (par le même genre de factorisation que ci-dessus), à $Y^2 = kX$, qui est une équation de parabole.
- dans le cas où $\delta > 0$, on peut toujours supposer $A > 0$ et $C > 0$ (sinon on change tous les signes) et se ramener à l'aide de mises sous forme canonique à une équation du genre $A'X^2 + C'Y^2 = k$ (les deux coefficients à gauche étant toujours positifs). Si $k < 0$, notre courbe est à nouveau vide, si $k = 0$, la courbe est réduite à un point (l'origine du dernier repère), enfin si $k > 0$, en divisant par k, on reconnait une équation réduite d'ellipse.
- enfin, si $\delta < 0$, on se ramène de même à $A'X^2 - C'Y^2 = k$. Si $k \neq 0$, on aura toujours une hyperbole (si la constante k est négative, on se trouvera seulement avec une hyperbole dont l'axe focal est l'axe des ordonnées). Par contre, si $k = 0$, on peut factoriser sous la forme $(\sqrt{A'}X - \sqrt{C}Y)(\sqrt{A'}X + \sqrt{C}Y) = 0$, ce qui correspond à deux droites sécantes (symétriques par rapport aux axes dans le dernier repère).

□

Exemple : On cherche à réduire l'équation $x^2 + 6xy + y^2 + 16x - 9 = 0$.

On peut commencer par calculer le discriminant $\delta = 1 - \dfrac{36}{4} = -8$ pour constater que notre courbe est de type hyperbole.

Pour la première étape, on admet que le fait que les coefficients devant x^2 et y^2 soient égaux permet d'effectuer une rotation d'angle $\dfrac{\pi}{4}$. On pose alors $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(x' - y')$ et $y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(x + y)$. Le membre de gauche devient alors $\dfrac{1}{2}(x' - y')^2 + 3(x' - y')(x' + y') + \dfrac{1}{2}(x' + y')^2 + 8\sqrt{2}(x' - y') - 9 = 4x'^2 - 2y'^2 + 8\sqrt{2}x' - 8\sqrt{2}y' - 9$. On constate en passant que le discriminant n'a effectivement pas changé, il vaut toujours -8.

On passe donc à la deuxième étape, qui consiste simplement ici à mettre sous forme canonique le membre de gauche : $4(x' + \sqrt{2})^2 - 8 - 2(y' + 2\sqrt{2})^2 + 16 - 9$. L'équation dans le repère translaté est donc $4X^2 - 2Y^2 = 1$. On reconnait ici l'équation d'une hyperbole, dont les paramètres sont $a = \dfrac{1}{2}$ et $b = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, centrée en $O(-\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$ dans le repère tourné de $\dfrac{\pi}{4}$. Dans le repère initial, on retrouve donc $x_O = \frac{\sqrt{2}}{2}(-\sqrt{2}+2\sqrt{2}) = 1$, et $y_O = \frac{\sqrt{2}}{2}(-\sqrt{2}-2\sqrt{2}) = -3$ On peut calculer facilement l'équation de l'axe focal, il forme un angle de $\frac{\pi}{4}$ par rapport à l'axe des abscisses, et passe par le point O. Autrement dit, il a une équation du type $y = x + b$, avec donc $b = -4$. On pourrait de même calculer les coordonnées des foyers et sommets de l'hyperbole. En voici une représentation :