Nombres complexes

PTSI B Lycée Eiffel

19 septembre 2012

Les nombres remarquables sont de sortie en discothèque.
e et π s'amusent comme des fous, mais i reste scotché au bar.
e va alors voir i et lui dit : « Allez, viens dans $\mathbb{C}$! »

Introduction

Pour ce deuxième chapitre de l'année, nous allons revenir sur une notion que vous avez déjà abordée l'an dernier, celle de nombres complexes. Ces derniers forment un outil fondamental en mathématiques, à la fois d'un point de vue théorique et d'un point de vue pratique (notamment en géometrie, comme on le verra un peu plus loin). Mais avant de commencer les explications, une petite question : pourquoi avoir « inventé » de toutes pièces ces nombres complexes ? Les différents ensembles de nombres sont apparus historiquement de façon relativement naturelle pour résoudre des problèmes concrets : les entiers naturels servent tout simplement à compter, les entiers relatifs deviennent nécessaires dès qu'on veut quantifier de façon un peu abstraite des échanges commerciaux, et les rationnels apparaissent dès qu'on cherche à diviser en plusieurs parts une quantité entière. Enfin, les réels permettent de graduer une droite et sont donc utiles pour se repérer (ils apparaissent par ailleurs assez rapidement dans des problèmes de géometrie : diagonale d'un carré ou périmètre d'un cercle). Les complexes, eux, ont été d'abord introduits pour permettre de résoudre des équations, les autres applications n'apparaissant qu'ensuite. En effet, on sait bien par exemple que tout nombre positif possède une racine carrée réelle (autrement dit, l'équation $x^2 = a$ admet une, et même deux, solutions réelles si $a > 0$), mais qu'en est-il pour les nombres négatifs, et notamment pour -1 ? L'ensemble des nombres complexes possède l'étonnante propriété que toute équation polynomiale y admet (au moins) une solution.

Objectifs du chapitre :

- maitrise du calcul algébrique sur les nombres complexes : résolution d'équations, utilisation alternée de la forme algébrique et de la forme trigonométrique dans la résolution de problèmes.
- compréhension du lien entre trignonométrie et nombres complexes via la notation d'exponentielle complexe.
- résolution de problèmes géométriques à l'aide des nombres complexes.

1 L'ensemble des nombres complexes, structure et opérations

1.1 Définitions

Définition 1. L'ensemble des **nombres complexes**, usuellement noté $\mathbb{C}$, est constitué de tous les nombres de la forme $a + ib$, où a et b sont deux réels quelconques. Il est muni des deux opérations suivantes : l'addition définie par $(a+ib)+(c+di) = a+c+(b+d)i$ et la multiplication définie par $(a+ib)(c+id) = ac-bd+(bc+ad)i$.

Remarque 1. Autrement dit, le nombre i vérifie $i^2 = -1$ et les opérations vérifient les propriétés usuelles.

Théorème 1. Propriétés des opérations usuelles sur les nombres complexes.

- L'addition est associative, commutative et a pour élément neutre $0+0i$ (désormais noté plus simplement 0), c'est-à-dire que, pour tout nombre complexe z, on a $z+0 = 0+z = z$.
- La multiplication est associative, commutative et a pour élément neutre $1+0i$ (noté 1).
- La multiplication est distributive par rapport l'addition.
- Tout nombre complexe z admet un opposé noté $-z$. Tout nombre complexe non nul z admet un inverse noté $\frac{1}{z}$ ou z^{-1}.

Démonstration.

- Les propriétés de l'addition découlent immédiatement de celles de l'addition sur les réels.
- Posons $z_1 = a+ib$; $z_2 = c+di$ et $z_3 = e+fi$ trois nombres complexes, on a $z_1z_2 = (a+ib)(c+id) = (ac-bd)+i(ad+bc) = (c+id)(a+ib)$, donc le produit est bien commutatif. De même $(z_1z_2)z_3 = ((ac-bd)+i(ad+bc))(e+if) = ace-bde-adf-bcf+i(acf-bdf+ade+bce)$ et $z_1(z_2z_3) = (a+ib)((ce-df)+i(cf+de)) = ace-adf-bcf-bde+i(acf+ade+bce-bdf)$. Les deux résultats étant les mêmes, le produit est bien associatif.
- La distributivité est à nouveau un calcul sans difficulté : $z_1(z_2+z_3) = (a+ib)(c+e+i(d+f)) = a(c+e)-b(d+f)+i(a(d+f)+b(c+e)) = ac-bd+i(ad+bc)+ae-bf+i(af+be) = z_1z_2+z_1z_3$.
- Enfin, l'opposé du complexe $a+ib$ est sans difficulté le complexe $-a-ib$; et l'inverse de z est le complexe $\dfrac{a-ib}{a^2+b^2}$. En effet, $(a-ib)(a+ib) = a^2-b^2$.

$\square$

Remarque 2. On identifie souvent l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels comme un sous-ensemble de $\mathbb{C}$ en associant à un réel a le nombre complexe $a+0i$. Les opérations définies plus haut prolongent alors la somme et le produit sur les réels.

Définition 2. Soit $z = a+ib$ un nombre complexe. Le réel a est appelé **partie réelle** de z, et noté $\mathrm{Re}\,(z)$. Le réel b est appelé **partie imaginaire** de z, et noté $\mathrm{Im}\,(z)$.

Définition 3. Un nombre complexe de partie réelle nulle est appelé **imaginaire pur**, et on note $i\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres imaginaires purs.

Remarque 3. Un nombre complexe est déterminé de façon unique par ses parties réelle et imaginaire, ce qui mène à l'identification suivante :

Définition 4. À tout nombre complexe $z = a+ib$, on peut associer le point M du plan (muni d'un repère orthonormé) de coordonnées (a, b). Le point M est appelé **image** du nombre complexe z, et le nombre z **affixe** du point M.

1.2 Conjugaison

On peut définir sur les nombres complexes une autre opération qui sera la première pour laquelle nous aurons une interprétation géométrique simple :

Définition 5. Soit $z = a+ib$ un nombre complexe, on appelle **conjugué** de z, et on note $\overline{z}$, le nombre $a-ib$.

Proposition 1. La conjugaison est compatible avec la somme et le produit : pour tous nombres complexes z et z', $\overline{z+z'} = \overline{z}+\overline{z'}$ et $\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$. De plus, la conjugaison est involutive, c'est-à-dire que $\overline{\overline{z}} = z$.

Démonstration. Soit $z = a + ib$ et $z' = c + id$, on a $\overline{z + z'} = \overline{a + c + i(b + d)} = a + c - i(b + d) = a - ib + c - id = \overline{z} + \overline{z'}$; $\overline{zz'} = \overline{ac - bd + i(ad + bc)} = ac - bd - i(ad + bc)$ et $\overline{z}\overline{z'} = (a - ib)(c - id) = ac - bd - i(ad + bc)$. La dernière propriété est tellement évidente que je vous épargne le calcul. □

Proposition 2. Pour tout nombre complexe z, on a $z + \overline{z} = 2\text{Re }(z)$ et $z - \overline{z} = 2i\text{Im }(z)$.
Par conséquent, z est un nombre réel si et seulement si $z = \overline{z}$ et z est imaginaire pur si et seulement si $z = -\overline{z}$.

Démonstration. Comme $z = a + ib$ et $\overline{z} = a - ib$, on a bien $z + \overline{z} = 2a = 2\text{Re }(z)$, et $z - \overline{z} = 2ib = 2i\text{Im }(z)$. □

Proposition 3. Soit z un nombre complexe et M son image dans un repère orthonormal du plan. Alors l'image de $\overline{z}$ est le symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses.

Démonstration. C'est une conséquence immédiate du fait que le symétrique de $M(a, b)$ par rapport à l'axe des abscisses est $M'(a, -b)$. □

1.3 Module

Définition 6. Le **module** d'un nombre complexe $z = a + ib$, noté $|z|$, est le réel positif $\sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Démonstration. On a bien $z\overline{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$. □

Remarque 4. Le calcul précedent devrait vous rappeler quelque chose : on a $z^{-1} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$. On utilise cette propriété pour « simplifier » les quotients de deux nombres complexes en multipliant numérateur et dénominateur par le conjugué du dénominateur, par exemple :

$$\frac{2 + i}{3 - 4i} = \frac{(2 + i)(3 + 4i)}{|3 - 4i|} = \frac{2 + 11i}{5}$$

Remarque 5. Pour un nombre réel, le module coincide avec la valeur absolue, ce qui explique que la notation soit la même.

Proposition 4. Pour tous nombres complexes z et z', on a $|zz'| = |z||z'|$. Si $z' \neq 0$, $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$. De plus, $|z| = |\overline{z}|$, et $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.

Démonstration. En effet, $|zz'| = \sqrt{zz'\overline{zz'}} = \sqrt{z\overline{z}z'\overline{z'}} = |z|.|z'|$. Le quotient se fait de la même façon. Le fait que $|z| = |\overline{z}|$ découle immédiatement de la définition. Enfin, pour que $|z| = |a + ib| = 0$, il faut avoir $a^2 + b^2 = 0$, ce qui ne se produit que si $a = b = 0$, donc si $z = 0$. □

Remarque 6. Si M est l'image de z dans un repère orthonormé d'origine O, le module de z représente tout simplement la distance OM.

Proposition 5. Soit z un nombre complexe, alors $|\text{Re }(z)| \leqslant |z|$ et $|\text{Im }(z)| \leqslant |z|$.

Démonstration. C'est évident en utilisant la remarque précédente, puisque Re (z) et Im (z) représentent les distances de O aux projetés orthogonaux de M sur les axes du repère. □

Théorème 2. Inégalité triangulaire
Soient z et z' deux nombres complexes, alors $||z| - |z'|| \leqslant |z + z'| \leqslant |z| + |z'|$. De plus, l'inégalité de droite est une égalité si et seulement si $z = \lambda z'$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ ou $z' = 0$.

Démonstration. Commençons par l'inégalité de droite : $|z+z'|^2 = (z+z')(\overline{z}+\overline{z'}) = |z|^2+|z'|^2+2\text{Re }(\overline{z}z') \leqslant |z|^2+|z'|^2+2|zz'| = (|z|+|z'|)^2$. Tous ces modules étant des réels positifs, l'inégalité triangulaire en découle par passage à la racine carrée.

L'inégalité de gauche est en fait presque la même que celle de droite. En effet, appliquons cette dernière à z' et $z-z'$, on obtient $|z| \leqslant |z'|+|z-z'|$, donc $|z|-|z'| \leqslant |z-z'|$. En inversant le rôle de z et z', on a de même $|z'|-|z| \leqslant |z'-z|$, ce qui permet d'ajouter la valeur absolue au membre de gauche. Ne reste plus qu' remplacer z en $-z$ pour la forme de l'énoncé.

Enfin, d'après la démonstration faite, l'égalité dans l'inégalité de droite se produit exactement quand $\text{Re }(\overline{z}z') = |zz'|$, ou encore quand $\text{Im }(\overline{z}z') = 0$, donc si $\text{Re }(z)\text{Im }(z') - \text{Im }(z)\text{Re }(z') = 0$. Autrement dit, les couples $(\text{Re }(z), \text{Im }(z))$ et $(\text{Re }(z'), \text{Im }(z'))$ sont proportionnels, ce qui signifie que les images des complexes z et z' sont alignés avec O dans le plan complexe. Cela correspond exactement à la condition donnée. □

Remarque 7. On peut facilement généraliser l'inégalité à plus de deux nombres complexes : $|z_1+\cdots+z_n| \leqslant |z_1|+\cdots+|z_n|$. Cette inégalité triangulaire généralisée se prouve par récurrence.

Une dernière application géométrique du module, la définition des cercles dans le plan complexe :

Proposition 6. Soit a un complexe, A son image et r un réel positif. L'ensemble M des points du plan d'affixe z vérifiant $|z-a| = r$ (respectivement $|z-a| \leqslant r$ et $|z-a| < r$) est le cercle (respectivement le disque fermé et ouvert) de centre A et de rayon r.

Démonstration. C'est évident dès qu'on a constaté que $|z-a|$ représentait la distance AM. □

Exemple : On peut passer de ce type d'équation de cercle à une équation cartésienne (faisant intervenir les deux corordonnées sous la forme (x,y)) par un calcul élémentaire. Faisons-le sur un exemple, celui du cercle de centre $A(1+i)$ et de rayon 2. En posant $z = x+iy$, on part de $|z-(1+i)|^2 = 4$, soit $(z-1-i)(\overline{z}-1+i) = 4$, donc $(x+iy-1-i)(x-iy-1+i) = 4$. Il ne reste plus qu'à développer : $x^2-ixy-x+ix+ixy+y^2-iy-y-x+iy+1-i-ix-y+i+1 = 4$, soit $x^2+y^2-2x-2y-2 = 0$.

2 Complexes et trigonométrie

2.1 Groupe des complexes de module 1

Définition 7. On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1 (ou nombres complexes **unimodulaires**). Cet ensemble est stable par produit et passage à l'inverse.

Démonstration. Si z et z' sont deux nombres complexes de module 1, on a $|zz'| = |z||z'| = 1$, et $|z^{-1}| = \dfrac{1}{|z|} = 1$, donc $\mathbb{U}$ est bien stable par produit et inversion. □

Remarque 8. Le produit complexe, restreint à $\mathbb{U}$, est donc associatif, possède un élément neutre 1, et tout élément de $\mathbb{U}$ est inversible. Ce sont ces propriétés qui font de $\mathbb{U}$ ce qu'on appelle un groupe commutatif, notion que étudierons plus en détail dans un chapitre ultérieur.

Définition 8. Soit x un réel quelconque, on note e^{ix} le nombre complexe $\cos x + i \sin x$.

Proposition 7. Pour tous réels x et y, on a $\overline{e^{ix}} = e^{-ix} = \left(e^{ix}\right)^{-1}$, et $e^{i(x+y)} = e^{ix}e^{iy}$. De plus, $e^{ix} \in \mathbb{U}$.

Démonstration. En effet, $\overline{e^{ix}} = \cos(x) - i\sin(x) = \cos(-x) + i\sin(-x) = e^{-ix}$, et d'après la formule que nous allons montrer juste après, $e^{ix}e^{-ix} = e^{i0} = 1$, donc $e^{-ix} = \left(e^{ix}\right)^{-1}$. La deuxième propriété découle imédiatement des formules d'addition pour le cos et le sin : $e^{ix}e^{iy} = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) + i(\cos(x)\sin(y) + \sin(x)\cos(y)) = \cos(x+y) + i\sin(x+y)$. Enfin, la dernière affirmation peut être démontrée de plusieurs façons, par exemple par calcul direct : $|e^{ix}| = \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$. □

Théorème 3. Soit $z \in \mathbb{U}$, alors z peut s'écrire sous la forme e^{ix}, où x est un réel unique modulo 2π.

Démonstration. Comme $|z| = 1$, le point $M(a; b)$ image de z dans le plan appartient au cercle trigonométrique. On a donc $a = \cos(x)$ et $b = \sin(x)$, où x est un angle défini à 2π près, et $z = a + ib = e^{ix}$. □

Remarque 9. Le réel x s'interprétant naturellement comme un angle, on utilise souvent la variable θ pour le paramétrage : $\mathbb{U} = \{e^{i\theta} \mid \theta \in [0; 2\pi[\}$.

2.2 Argument d'un nombre complexe

Proposition 8. Tout nombre complexe non nul z peut s'écrire sous la forme $re^{i\theta}$, où $r = |z| \in \mathbb{R}^+$, et θ est un réel défini à 2π près. Cette écriture est appelée **forme trigonométrique** du nombre complexe z.

Démonstration. C'est une application immédiate du théorème du paragraphe précedent : $z = |z|\dfrac{z}{|z|}$, et le complexe $\dfrac{z}{|z|}$ ayant pour module 1, il peut s'écrire sous la forme $e^{i\theta}$. □

Définition 9. Le réel θ est appelé **argument** du nombre complexe z, et noté $arg(z)$ (il n'est pas unique). L'unique valeur de θ appartenant à l'intervalle $] - \pi; \pi]$ est l'**argument principal** de z, souvent noté $Arg(z)$.

Remarque 10. Le nombre complexe 0 est donc le seul à ne pas posséder d'argument.

Proposition 9. Les arguments vérifient les propriétés suivantes :
- $\arg(-z) = \arg(z) + \pi$
- $\arg(\overline{z}) = -\arg(z)$
- $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$
- $\arg\left(\dfrac{z}{z}\right) = \arg(z) - \arg(z')$

Démonstration. C'est en fait une simple redite des propriétés vues au paragraphe précédent. Si $z = re^{i\theta}$ et $z' = r'e^{i\theta'}$, on a les formes trigonométriques suivantes : $-z = r(-e^{i\theta}) = r(-\cos(\theta) - i\sin(\theta)) = r(\cos(\theta + \pi) + i\sin(\theta + \pi)) = re^{i(\theta+\pi)}$; $\overline{z} = r\overline{e^{i\theta}} = re^{-i\theta}$; $zz' = rr'e^{i\theta}e^{i\theta'=rr'e^{i(\theta+\theta')}}$, et de même pour le quotient. □

2.3 Applications en trigonométrie

Proposition 10. Formules d'Euler.
Pour tout réel θ, $\cos(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$.

Démonstration. C'est en fait une simple redite pour le cas de $e^{i\theta}$ des formules $z + \overline{z} = 2\text{Re }(z)$ et $z - \overline{z} = 2i\text{Im }(z)$ □

Proposition 11. Formules de Moivre.
Pour tout réel θ, $\cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n$.

Démonstration. De façon équivalente, il suffit de montrer que $e^{in\theta} = \left(e^{i\theta}\right)^n$, ce qui se prouve aisément par récurrence : c'est une évidence pour $n = 1$, et si la formule est vraie au rang n, alors $e^{i(n+1)\theta} = e^{in\theta+i\theta} = e^{in\theta}e^{i\theta} = \left(e^{i\theta}\right)^n e^{i\theta} = \left(e^{i\theta}\right)^{n+1}$. □

Plus que les formules elles-mêmes, ce sont quelques calculs classiques les utilisant qu'il faut connaitre :
Exemple 1 : On a vu dans le premier chapitre des formules de duplication et de triplication du cosinus. Les formules de Moivre et d'Euler permettent plus généralement de calculer $\cos(n\theta)$ comme

un polynome en $\cos(\theta)$ (et de même pour le sinus) via la formule du binome de Newton. Par exemple (attention les yeux) :

$$\begin{aligned}
\cos(5\theta) &= \frac{e^{5i\theta}+e^{-5i\theta}}{2} \\
&= \frac{1}{2}\left((\cos(\theta)+i\sin(\theta))^5+(\cos(\theta)-i\sin(\theta))^5\right) \\
&= \frac{1}{2}(\cos^5(\theta)+5i\cos^4(\theta)\sin(\theta)-10\cos^3(\theta)\sin^2(\theta)-10i\cos^2(\theta)\sin^3(\theta) \\
&\quad +5\cos(\theta)\sin^4(\theta)+i\sin^5(\theta)+\cos^5(\theta)-5i\cos^4(\theta)\sin(\theta) \\
&\quad -10\cos^3(\theta)\sin^2(\theta)+10i\cos^2(\theta)\sin^3(\theta)+5\cos(\theta)\sin^4(\theta)-i\sin^5(\theta)) \\
&= \cos^5(\theta)-10\cos^3(\theta)(1-\cos^2(\theta))+5\cos(\theta)(1-\cos^2(\theta))^2 \\
&= 16\cos^5(\theta)-20\cos^3(\theta)+5\cos(\theta)
\end{aligned}$$

Exemple 2 : Dans l'autre sens, on peut facilement linéariser les puissances du cosinus (et du sinus), c'est-à-dire les exprimer en fonction des cosinus des multiples de θ, par exemple :

$$\cos^3(\theta) = \left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}(e^{3i\theta}+3e^{i\theta}+3e^{-i\theta}+e^{-3i\theta}) = \frac{1}{8}(2\cos(3\theta)+6\cos(\theta)) = \frac{1}{4}\cos(3\theta)+\frac{3}{4}\cos(\theta)$$

Exemple 3 : Une autre technique utile est celle de la factorisation par l'angle moitié, par exemple $e^{i\theta}+1 = e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}}+e^{-i\frac{\theta}{2}}\right) = 2\cos\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}$.
Un exemple d'application à un calcul de somme :

$$\sum_{k=0}^{k=n}\cos(k\theta) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{k=n}e^{ik\theta}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{1-e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{-2ie^{i(n+1)\frac{\theta}{2}}\sin(\frac{(n+1)\theta}{2})}{-2ie^{i\frac{\theta}{2}}\sin(\frac{\theta}{2})}\right) = \frac{\cos(\frac{n\theta}{2})\sin(\frac{(n+1)\theta}{2})}{\sin(\frac{\theta}{2})}$$

(on utilise en cours de calcul la formule de calcul d'une somme de termes d'une suite géométrique, qui fonctionne très bien avec des nombres complexes).

2.4 Exponentielle complexe

On peut en fait généraliser la définition de l'exponentielle à tout nombre complexe.

Définition 10. Soit $z = a+ib$ un nombre complexe, son exponentielle est le nombre $e^z = e^a e^{ib}$.

Remarque 11. Cette définition généralise à la fois celle de l'exponentielle réelle et celle donnée pour les imaginaires purs. On a en fait $\arg(e^z) = \mathrm{Im}\ (z)$ et $|e^z| = e^{\mathrm{Re}\ (z)}$.

Proposition 12. La fonction exponentielle complexe est $2i\pi$-périodique, et vérifie la propriété $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$.

Démonstration. La périodicité découle simplement du fait que $e^{2i\pi} = 1$, et l'équation fonctionnelle est issue de celle vérifiée par les deux exponentielles déjà définies précédemment. $\square$

3 Équations complexes

3.1 Racines n-èmes de l'unité

Définition 11. Les **racines n-èmes** d'un nombre complexe a sont toutes les solutions de l'équation $z^n = a$.

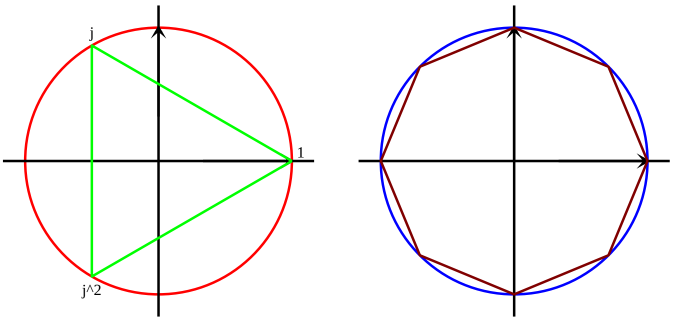
Remarque 12. Cette équation a en général plusieurs solutions, il est hors de question de parler de **la** racine n-ème d'un complexe comme on peut le faire pour un réel. De même, le symbole $\sqrt{\ }$ est à éviter absolument quand on travaille avec des complexes, du fait de l'absence de distinction possible entre les deux racines carrées d'un nombre complexe (pas de positivité sur $\mathbb{C}$, ni même de notion d'ordre).

Définition 12. On appelle **racines n-èmes de l'unité** les racines n-èmes du nombre 1.

Théorème 4. Les racines n-èmes de l'unité sont les n complexes $e^{\frac{2ik\pi}{n}}$, k variant de 0 à $n-1$.

Démonstration. En effet, soit $z = re^{i\theta}$ un nombre complexe (non nul) mis sous forme trigonométrique. On a $z^n = 1$ si et seulement si $r^n = 1$ et $e^{in\theta} = 1$. Or, r étant un réel positif, on a nécessairement $r = 1$, et $e^{in\theta} = 1 \Leftrightarrow in\theta \equiv 0[2\pi]$, donc $\theta \equiv 0 \left[\dfrac{2\pi}{n}\right]$, ce qui donne bien, modulo 2π, les n valeurs annoncées. $\square$

Si on essaie de visualiser dans le plan complexe le résultats précédent, les racines n-èmes forment en fait un n-gone régulier inscrit dans le cercle trigonométrique, par exemple pour $n = 3$ et $n = 8$:



Définition 13. On note habituellement j le nombre complexe $e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Les racines cubiques de l'unité sont 1, j et $j^2 = \overline{j}$.

Démonstration. En effet, la troisième racine cubique de l'unité est d'après le théorème précédent $e^{\frac{4i\pi}{3}}$, qui est bien égale à j^2. De plus, $\overline{j} = \cos\dfrac{2\pi}{3} - i\sin\dfrac{2\pi}{3} = -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = e^{\frac{4i\pi}{3}}$. $\square$

Remarque 13. Plus généralement, on peut en fait remarquer qu'en notant $\omega = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$, l'ensemble des racines n-èmes de l'unité est constitué des nombres de la forme ω^k, pour k variant entre 0 et $n-1$ (ω est appelée racine n-ème primitive de l'unité, car on peut obtenir toutes les autres en prenant les puissances de celle-ci). En particulier, il est stable par produit, ce qui en fait, tout comme $\mathbb{U}$, un **groupe**. Il s'agit même d'un sous-groupe de $\mathbb{U}$, puisqu'il est inclus dans ce dernier (les racines n-èmes de l'unité ayant toujours pour module 1). On le note $\mathbb{U}_n$.

Proposition 13. Les éléments de $\mathbb{U}_n$ vérifient les propriétés suivantes : $\displaystyle\sum_{\omega\in\mathbb{U}_n} \omega = 0$; et pour tout nombre complexe z, $\displaystyle\prod_{\omega\in\mathbb{U}_n} (z-\omega) = z^n - 1$.

Démonstration. La première égalité est un simple calcul : $\displaystyle\sum_{\omega\in\mathbb{U}_n} \omega = \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2ik\pi}{n}} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{\frac{2i\pi}{n}}\right)^k = \frac{e^{2i\pi} - 1}{e^{\frac{2i\pi}{n}} - 1} = 0$. Pour démontrer la deuxième, nous avons besoin de quelques propriétés élémentaires des polynomes qui seront démontrées plus loin dans le cours, notamment le fait qu'un polynome de degré n admet exactement n racines $z_1, \dots z_n$ dans $\mathbb{C}$ (éventuellement multiples) et qu'on peut le factoriser comme produit de monomes de la forme $P(z) = \alpha \displaystyle\prod_{i=1}^{n} (z - z_i)$, α étant le coefficient dominant du polynome P. Ici, $\alpha = 1$, et les n racines du polynome sont, par définition, les racines n-èmes de l'unité, ce qui donne la factorisation annoncée. $\square$

Tous ces calculs se généralisent facilement aux cas des racines n-èmes de n'importe quel combre complexe non nul, contentons-nous d'énoncer le résultat suivant :

Proposition 14. Soit $z = re^{i\theta}$ un nombre complexe mis sous forme trigonométrique. Ses n racines n-èmes sont les nombres de la forme $\sqrt[n]{r}e^{\frac{i(\theta+2k\pi)}{n}}$, $k \in \{0, \dots, n-1\}$.

Démonstration. L'équation $z^n = re^{i\theta}$ se résout de la même façon que $z^n = 1$, et on obtient les racines démandées sans difficulté. □

Exemple : On cherche à déterminer les racines cubiques de $a = 2+2i$. Commençons par écrire a sous forme exponentielle : $|a| = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$, donc $a = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$. En notant $z = re^{i\theta}$, l'équation $z^3 = a$ se ramène à $r^3e^{3i\theta} = a$, c'est-à-dire aux deux conditions $r^3 = 2\sqrt{2}$ et $3\theta \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$, soit $r = \sqrt{2}$, et $\theta \equiv \frac{\pi}{12}\left[\frac{2\pi}{3}\right]$. Autrement dit, les trois racines cubiques sont $z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$, $z_2 = \sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi}{3})} = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$, et $z_3 = \sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{12}+\frac{4\pi}{3})} = \sqrt{2}e^{i\frac{17\pi}{12}}$.

Remarque 14. En particulier, tout nombre complexe non nul admet deux racines carrées, qui sont opposées l'une de l'autre.

3.2 Équations du second degré

Théorème 5. Soit à résoudre une équation de la forme $az^2 + bz + c = 0$ (les coefficients a, b et c étant des nombres complexes, et a non nul). On pose $\Delta = b^2 - 4ac$ et δ une des deux racines carrées de Δ. Alors notre équation admet deux solutions $z_1 = \frac{-b-\delta}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b+\delta}{2a}$. Dans le cas où $\Delta = 0$, ces deux solutions sont confondues, égales à $\frac{-b}{2a}$. Si les coefficients sont réels et $\Delta < 0$, z_1 et z_2 sont conjugués l'un de l'autre.

Démonstration. La preuve est la même que dans le cas réel : en divisant l'équation par a puis en mettant sous forme canonique, on obtient $\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$. Si Δ est nul, il n'y a qu'une seule solution égale à $\frac{-b}{2a}$. Sinon, on a $z + \frac{b}{2a} = \frac{\delta}{2a}$ ou $z + \frac{b}{2a} = -\frac{\delta}{2a}$, ce qui donne les deux solutions annoncées. □

Méthode : Pour obtenir une racine carrée d'un nombre complexe, il est en général conseillé d'utiliser la méthode trigonométrique vue au paragraphe précédent, mais on peut également le faire algébriquement : si $z^2 = a + ib$, avec $z = x + iy$, alors par égalité des modules $x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$, mais comme $\mathrm{Re}\, z^2 = a$, on a aussi $x^2 - y^2 = a$, dont on déduit les valeurs de x^2 et de y^2. Ensuite, l'égalité des parties imaginaires donne $2xy = b$, ce qui permet de connaitre les signes de x et de y (il y a bien entendu deux possibilités).
Par exemple, pour résoudre $z^2 = 12 + 5i$, on obtient $x^2 + y^2 = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$ et $x^2 - y^2 = 12$, donc $2a^2 = 25$ et $2b^2 = 1$, soit $a = \pm\frac{5}{\sqrt{2}}$ et $b = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Et comme enfin $2ab = 5$, on obtient les deux solutions $z_1 = \frac{5+i}{\sqrt{2}}$ et $z_2 = \frac{-5-i}{\sqrt{2}}$.
Exemple : On veut résoudre l'équation $z^2 - iz - i - 1 = 0$. On calcule donc le discriminant $\Delta = (-i)^2 - 4(-i-1) = -1 + 4i + 4 = 3 + 4i$. Cherchons donc $\delta = a + ib$ vérifiant $\delta^2 = 3 + 4i$. Comme $\delta^2 = a^2 - b^2 + 2iab$, on obtient les deux conditions $a^2 - b^2 = 3$ et $2ab = 4$. On ajoute la condition sur le module $|\delta|^2 = a^2 + b^2 = |\Delta| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$. En additionant et soustrayant la première et la dernière équation, on a $2a^2 = 8$, soit $a = \pm 2$; et $2b^2 = 2$, soit $b = \pm 1$. Comme par ailleurs $2ab > 0$, a et b doivent être de même signe, ce qui laisse les possibilités $\delta_1 = 2+i$ et $\delta_2 = -2-i$. Les solutions de l'équation initiale sont donc $z_1 = \frac{i+2+i}{2} = 1 + i$, et $z_2 = \frac{i-2-i}{2} = -1$.

Proposition 15. Soient z_1 et z_2 les deux solutions de l'équation $az^2+bz+c=0$, alors $z_1+z_2=-\frac{b}{a}$ et $z_1z_2=\frac{c}{a}$.

Démonstration. On peut s'en sortir directement avec les formules donnant les solutions : $z_1+z_2=\frac{-b-\delta}{2a}+\frac{-b+\delta}{2a}=\frac{-2b}{2a}-\frac{b}{a}$, et $z_1z_2=\frac{-b-\delta}{2a}\frac{-b+\delta}{2a}=\frac{b^2-\delta^2}{4a^2}=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}$. □

Terminons ce paragraphe en citant, sans le démontrer, un théorème extrêmement fondamentale sur les équations complexes :

Théorème 6. D'Alembert-Gauss.
Toute équation polynomiale admet au moins une solution dans $\mathbb{C}$.

Remarque 15. Ce théorème porte également le nom pompeux de théorème fondamental de l'algèbre. Il peut être précisé, le nombre de racines d'un polynome de degré n étant toujours égal à n si on les compte avec multiplicité. Nous reviendrons sur ces notions plus tard.

4 Complexes et géometrie

4.1 Affixes d'objets géométriques du plan

Nous avons déjà vus qu'on pouvait de façon naturelle associer un nombre complexe à chaque point du plan, et que le module et l'argument s'interprétaient respectivement comme une longueur et un angle. De façon similaire, on peut associer un nombre complexe aux vecteurs du plan :

Définition 14. L'**affixe** complexe du vecteur du plan $\overrightarrow{u}=x\overrightarrow{i}+y\overrightarrow{j}$ est le nombre $z_{\overrightarrow{u}}=x+iy$.

Proposition 16. Propriétés des affixes vectorielles :

- Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan, $z_{\vec{u}+\vec{v}}=z_{\vec{u}}+z_{\vec{v}}$.
- Pour tout vecteur $\vec{u}$ et tout réel λ, $z_{\lambda\vec{u}}=\lambda z_{\vec{u}}$.
- Pour tous points M et M' du plan, $z_{\overrightarrow{MM'}}=z_M-z_{M'}$.
- Pour tout système pondéré $((M_1,\alpha_1);\dots;(M_n,\alpha_n))$ de points du plan vérifiant $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1$, le barycentre G du système a pour affixe $z_G=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i z_{M_i}$.

Démonstration.

- C'est une conséquence immédiate du fait que les coordonnées d'une somme de vecteurs sont obtenues en faisant la somme des coordonnées des deux vecteurs.
- C'est tout aussi immédiat.
- En effet, si M a pour coordonnées (a,b) et $M'(a',b')$, $\overrightarrow{MM'}=(a'-a)\overrightarrow{i}+(b'-b)\overrightarrow{(}j)$ a pour affixe $a'-a+i(b'-b)=a'+ib'-(a+ib)$.
- C'est une conséquence de la caractérisation vectorielle du barycentre : on a en particulier $\overrightarrow{OG}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{OM_i}$, il ne reste plus qu'à prendre les affixes.

□

Plus intéressante est la propriété suivante, qui est la base de l'utilisation des complexes en géométrie :

Proposition 17. Soient A, B et C trois points du plan, alors $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})\equiv\arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)[2\pi]$ et $\frac{AC}{AB}=\left|\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right|$.

Démonstration. En effet, $\arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \arg(z_C - z_A) - \arg(z_B - z_A) = (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{AC}) - (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ et de même $\left|\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = \dfrac{\| \overrightarrow{AC} \|}{\| \overrightarrow{AB} \|} = \dfrac{AC}{AB}$. □

4.2 Produit scalaire et déterminant

Proposition 18. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan, alors $\vec{u}.\vec{v} = \text{Re}\,(\overline{z_{\vec{u}}} z_{\vec{v}})$ et $\det(\vec{u}, \vec{v}) = \text{Im}\,(\overline{z_{\vec{u}}} z_{\vec{v}})$.

Démonstration. Si $\vec{u} = (a, b)$ et $\vec{v} = (a', b')$, alors $z_{\vec{u}} = a + ib$ et $z_{\vec{v}} = a' + ib'$, donc $\text{Re}\,(\overline{z_{\vec{u}}} z_{\vec{v}}) = ab' + a'b = \vec{u}.\vec{v}$. De même, $\text{Im}\,(\overline{z_{\vec{u}}} z_{\vec{v}}) = aa' - bb' = \det(\vec{u}, \vec{v})$. □

Proposition 19. Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\dfrac{z_{\vec{u}}}{z_{\vec{v}}} \in i\mathbb{R}$. Ils sont colinéaires si et seulement si $\dfrac{z_{\vec{u}}}{z_{\vec{v}}} \in \mathbb{R}$.

Démonstration. Il est plus simple de prouver cette proposition à l'aide du dernier résultat du paragraphe précédent, c'est même immédiat ! Mais si on reprend notre démonstration du cas d'égalité de l'inégalité triangulaire, on voit que ces conditions sont équivalentes à celles d'annulation des formules données ci-dessus pour le produit scalaire et le déterminant. □

4.3 Transformations du plan

Toutes les transformations du plan que vous avez pu étudier dans les classes antérieures peuvent s'exprimer simplement à l'aide des affixes complexes :

Proposition 20. Soit M un point du plan, z son affixe.

- L'image M' de M par la translation de vecteur $\vec{u}$ a pour affixe $z_{M'} = z_M + z_{\vec{u}}$.
- L'image M' de M par la rotation d'angle θ et de centre A a pour affixe $z_{M'} = e^{i\theta}(z_M - z_A) + z_A$.
- L'image M' de M par l'homothétie de rapport h et de centre A a pour affixe $z_{M'} = h(z_M - z_A) + z_A$.
- L'image M' de M par la réflexion d'axe (Ox) (respectivement (Oy) a pour affixe $z_{M'} = \overline{z_M}$ (resp. $z_{M'} = -\overline{z_M}$).

Démonstration.

- En effet, $z_{\vec{u}} = z_{\overrightarrow{MM'}} = z_{M'} - z_M$, dont on déduit la formule donnée.
- On peut caractériser l'image d'une rotation par le fait que $AM = AM'$, et $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}) = \theta$. Autrement dit, le nombre complexe $\dfrac{z_A - z_{M'}}{z_A - z_M}$ a pour module 1 (le numérateur et le dénominateur ont pour module respectif AM' et AM), et pour argument θ. On peut donc écrire $\dfrac{z_A - z_{M'}}{z_A - z_M} = e^{i\theta}$, soit $z_{M'} = e^{i\theta}(z_M - z_A) + z_A$.
- Même principe que pour la rotation, on aura cette fois-ci $\dfrac{z_A - z_{M'}}{z_A - z_M} = h$ (le rapport des modules vaut h, et l'angle est nul), dont on déduit aisément la formule.
- On a déjà vu la caractérisation géométrique de la conjugaison. il suffit de constater que, si $z = a + ib$, $-\overline{z} = -a + ib$ pour en déduire que cela correspond à une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.

□

Exemple : La rotation de centre $A(0; 1)$ et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$ transforme $M(z)$ en $M'(z')$ avec $z' = \left(-\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)(z - i) + i = \left(-\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right) z - \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3i}{2}$.

Remarque 16. Toutes ces transformations sont de la forme $z \mapsto az+b$ ou $z \mapsto a\overline{z}+b$ (pour les réflexions), avec a non nul et b quelconque. Par ailleurs, les transformations de la première catégorie conservent les angles orientés alors que celles de la deuxième catégorie les inversent, et seules les transformations pour lesquelles $a \in \mathbb{U}$ conservent les distances. Ce sont des cas particuliers du puissant théorème que nous allons maintenant énoncer.

Définition 15. Une transformation du plan est appelée **isométrie** si elle conserve les distances, et **similitude** de rapport λ si elle multiplie toutes les distances par un même réel $\lambda > 0$. Par ailleurs, une similitude (ou une isométrie) est dite **directe** si elle préserve les angles orientés, **indirecte** si elle transforme tout angle orienté en son opposé.

Théorème 7. Caractérisation complexe des isométries et des similitudes.

- Les similitudes directes du plan correpondent à une action sur les affixes complexes de la forme $z \mapsto az+b$, avec $a \neq 0$.
- Les isométries directes du plan correspondent à une action sur les affixes complexes de la forme $z \mapsto az+b$, avec $a \in \mathbb{U}$.
- Les similitudes indirectes du plan correspondent à une action sur les affixes complexes de la forme $z \mapsto a\overline{z}+b$, avec $a \neq 0$.
- Les isométries indirectes du plan correspondent à une action sur les affixes complexes de la forme $z \mapsto a\overline{z}+b$, avec $a \in \mathbb{U}$.

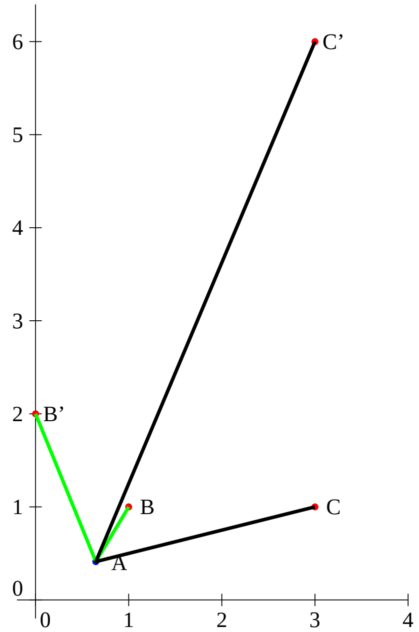
Démonstration. La démonstration est faisable par des moyens élémentaires, mais assez rébarbative, je vous en fais grâce. □

Méthode : Pour reconnaitre une similitude à partir de son équation $z' = az+b$, on peut procéder de la façon suivante (on traite le cas des similitudes directes, les similitudes indirectes étant de toute façon obtenues à partir de ces dernières par simple composition par la conjugaison).

- Si $a = 1$, on reconnait immédiatement une translation, dont le vecteur a pour affixe b.
- Si $a \neq 1$, l'application $z \mapsto az+b$ admet un unique point fixe ω, dont on notera Ω l'image dans le plan complexe. En notant $\lambda = |a|$ et $\alpha = \arg(a)$, l'application f est alors la composée d'une homothétie de centre Ω et de rapport λ, et d'une rotation de centre Ω et d'angle α. Le réel λ est appelé rapport de similitude de l'application f, et α angle de la similitude.

Exemple : Considérons l'application $f : z \mapsto (1+i)z - 2i$. On recherche le point fixe de l'application en résolvant l'équation $z = (1+i)z - 2i$, ce qui donne $iz = 2i$, soit $z = \frac{1}{2}$. Comme par ailleurs $|1+i| = \sqrt{2}$, et $\arg(1+i) = \frac{\pi}{4}$, l'application f est la composée d'une rotation de centre $A\left(\frac{1}{2}\right)$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$, et d'une homothétie de même centre A et de rapport $\sqrt{2}$.

Exemple 2 : Une isométrie peut également être décrite par l'image de certains points du plan. Ainsi, posons $B(1+i)$, $C(3+i)$, $B'(2i)$ et $C'(3+6i)$. On admet qu'il existe une unique similitude directe du plan f vérifiant $f(B) = B'$ et $f(C) = C'$. Déterminons l'équation de cette similitude. On sait qiu'elle admet nécessairement une écriture de la forme $f(z) = az+b$, avec ici $f(1+i) = a(1+i)+b = 2i$, et $f(3+i) = a(3+i)+b = 3+6i$. En soustrayant les deux équations, on obtient immédiatement $2a = 3+4i$, soit $a = \frac{3}{2}+2i$; puis on en déduit $b = 2i - a(1+i) = 2i - \frac{3}{2} - 2i - \frac{3}{2}i + 2 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$. On a donc $f(z) = \left(\frac{3}{2}+2i\right)z + \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$. Cherchons désormais le point fixe de cette similitude : $f(z) = z \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}+2i\right)z + \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i = z \leftrightarrow z = \frac{-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i}{\frac{1}{2}+2i} = \frac{-1+3i}{1+4i} = \frac{(-1+3i)(1-4i)}{17} = \frac{11+7i}{17}$. La similitude a donc pour centre $A\left(\frac{11}{17}+\frac{7}{17}i\right)$ Par ailleurs, la similitude a pour rapport $\left|\frac{3}{2}+2i\right| = \sqrt{\frac{9}{4}+4} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$; et pour angle $\arg\left(\frac{3}{2}+2i\right)$, qui n'est pas un angle remarquable. Une illustration de ces calculs :



C'
B'
B
C
A
0
1
2
3
4
5
6
0
1
2
3
4