

TP Maple n°3 : Algèbre linéaire

PTSI B Lycée Eiffel

24 avril 2013

Dans tout ce troisième TP de Maple, nous ferons un usage intensif du package **linalg**, dédié à l'algèbre linéaire. Commencez donc par taper sur votre clavier préféré **with(linalg)** ; la liste de fonctions dans le package est assez impressionnante, nous allons essayer d'en parcourir une partie.

1 Manipulation de matrices

À l'aide des fonctions du package `linalg`, tentez de réaliser les opérations suivantes :

- définir le vecteur ligne $(1, 2, 3)$.
- définir la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, et la faire afficher par Maple.
- définir la matrice $B \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ contenant les coefficients $b_{ij} = \frac{i}{j}$ (sans les taper tous à la main, bien entendu).
- calculer pour chacune des deux matrices précédentes, la transposée, la trace, le déterminant, l'inverse (s'il existe).
- définir une autre matrice trois lignes trois colonnes de votre choix (on la notera C) et effectuer le produit AC .
- déterminer ce que font les commandes suivantes et les tester : `dotprod` (sur deux vecteurs), `crossprod` (sur deux vecteurs également), `kernel` (sur une matrice), `colspace` (matrice), `gausselim` (matrice)
- Résoudre un système d'équations linéaires (ce que vous voulez) à l'aide de la commande `solve`, puis de la commande `linsolve`.

2 Exercices (extraits de sujets d'oraux)

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer toutes les matrices qui commutent avec A .
2. Résoudre en discutant suivant la valeur de m le système
$$\begin{cases} mx + y + mt = 1 \\ x + m^2y + z + mt = m \\ x + my + t = 1 \\ my + m^2t = m^2 \end{cases}.$$
3. On considère f l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} -2 & -5 & 4 & 8 \\ -4 & -15 & 12 & 20 \\ -1 & -5 & 4 & 6 \\ -3 & -10 & 8 & 14 \end{pmatrix}$. Déterminer une base de $\ker(f) \cap \text{Im}(f)$.
4. La matrice carrée constituée des 100 premiers entiers premiers (écrits ligne par ligne) est-elle inversible (on pourra utiliser la commande `isprime`) ?
5. Déterminer a , b et c pour que $P(X) = 2X^5 - 3X^4 + aX^3 + bX^2 + cX + 4$ admette une racine triple et deux autres racines simples opposées.
6. Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & 8 & -2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$. La matrice A est-elle inversible ? Montrer que $F = \{B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid AB = 0\}$ est un espace vectoriel et donner sa dimension. Même question pour $G = \{C \mid CA = 0\}$. Les espaces F et G sont-ils les mêmes ? Sinon, déterminer leur intersection.
7. Déterminer toutes les matrices $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ -b & a & b \\ -c & -b & a \end{pmatrix}$ telles que $M^2 = I$. Donner une interprétation géométrique.