TP Maple n°2 : Courbes

PTSI B Lycée Eiffel

14 février 2013

Deuxième séance de Maple, consacrée aux courbes en tout genre. Courbes de fonctions usuelles de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, courbes paramétrées, courbes polaires, courbes intégrales d'équations différentielles (on redira deux mots de la méthode d'Euler), courbes représentant des suites récurrentes, et même un peu de fractales si on a le temps.

1 Commande plot et options.

Nous avons déjà évoqué dans notre premier TP la commande **plot**, qui sert à tracer divers types de courbes. Nous allons commencer avec des courbes de fonctions usuelles, mais en essayant d'exploiter les nombreuses options de la commande **plot**. En vrac, je vous conseille d'aller jeter un oeil dans l'aide aux options suivantes : caption, color, discont, linestyle, numpoints, style, thickness. Pour voir si vous êtes devenus en quelques minutes des experts du graphe en Maple, réalisez les objectifs suivants :

- Tracer la courbe de la fonction $x \mapsto x^3 \sin(e^{\frac{1}{x}})$ entre 0.15 et 0.2 en faisant varier le nombre de points. Celà change-t-il quelque chose ?
- Tracer la courbe de la fonction partie entière en faisant apparaitre les discontinuités.
- Faire tracer à Maple une allure de la courbe de la fonction tangente où on comprend ce qu'il se passe.
- Tracer la courbe de la fonction $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$ sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
- Tracer dans un même repère les courbes des fonctions $x \mapsto \ln(x)$, $x \mapsto \sqrt{x}$ et $x \mapsto \sqrt[3]{x}$, respectivement en vert, en bleu et en rouge, en mettant la courbe du logarithme en plus gras que les autres. Ah, et on impose l'intervalle $[1, 50]$ sur l'axe des abscisses.
- Tracer dans un même repère les courbes des fonctions $x \mapsto x$, $x \mapsto x - \dfrac{x^3}{6}$, $x \mapsto x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120}$ etc (à chaque fois on rajoute un terme en $\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, avec des signes alternés). Que semble-t-il se passer quand on augmente le nombre de termes ?

2 Courbes paramétrées et polaires.

Pour les courbes en polaires, vous pourrez au choix vous renseigner sur la commande **polarplot**, ou utiliser un simple **plot** avec un usage intelligent de l'option coords. Pour les courbes paramétrées, un simple plot fonctionne très bien. Voici vos nouvelles missions :

- Tracer diverses courbes de Lissajous $\left\{ \begin{array}{rcl} x(t) & = & \cos(kt) \\ y(t) & = & \sin(nt) \end{array} \right.$, pour différentes valeurs des entiers k et n. Pour rendre la chose plus intéressante, on essaiera de faire calculer à Maple les coordonnées des points doubles, et de les placer sur la courbe.

- Tracer la courbe paramétrée $\begin{cases} x(t) & = & 2\sin(t)+\cos(t) \\ y(t) & = & \sin^3(t)+2\cos^3(t) \end{cases}$. Déterminer (avec Maple) les points stationnaires et leur nature.
- Tracer la courbe paramétrée $\begin{cases} x(t) & = & t+\dfrac{1}{2t^2} \\ y(t) & = & t^2+2t \end{cases}$ ainsi que ses aymptotes éventuelles.
- Tracer les courbes polaires $r = 1+\cos(\theta)$; $r = \dfrac{1}{\cos^2(\theta)}$; $r = 1+\cos(\theta)+\sin^2(n\theta)$ pour diverses valeurs de n (on pourra tenter d'exploiter la commande **animate** pour faire de belles choses à l'écran).

3 Un peu d'équations différentielles.

On souhaite par exemple faire tracer à Maple quelques-unes des courbes intégrales de l'équation différentielle $y'+2xy = \sin(x)e^x$. On peut bien évidemment commencer par lui faire résoudre l'équation à coups de **dsolve**, puis lui faire tracer les courbes des fonctions obtenues. Mais il existe quelques commandes supplémentaires qui peuvent être bien utiles. Vous pouvez commencer par tester **odeplot**, qui fait en gros ce que je décris juste au-dessus, puis essayez de tracer le champ de vecteurs des vecteurs dérivés de l'équation différentielle à l'aide de **gradplot** (si vous ne comprenez rien à la phrase précédente, écoutez-moi quand j'expliquerai de quoi il s'agit au tableau). Mieux, tentez de tracer le champ de vecteurs et les courbes intégrales dans le même repère (la commande **display** peut être utile pour superposer plusieurs graphiques de nature différente).

Quand vous aurez réussi à faire tout ça, nous reviendrons sur la méthode d'Euler vue en classe il y a quelques mois. je vous rappelle le principe : il s'agit de tracer une courbe approchée de la solution d'une équation différentielle en traçant des segments de droite successifs sur des intervalles de largeur h fixé à l'avance (le pas de la méthode). On part ainsi d'un point de la courbe de coordonnées (x, y), et on trace sur le segment $[x, x+h]$ une droite passant par le point et dont la pente est donnée par la valeur de y' obtenue en remplaçant x et y par les valeurs du point dans l'équation différentielle. Ainsi, pour l'équation $y' = y$, on obtiendra une allure approchée de la courbe de l'exponentielle en prenant des segments de droite de pente y en chaque point. Tracer ainsi des allures approchées de l'exponentielle sur l'intervalle $[0, 10]$ en partant du point $(0, 1)$ et en prenant différentes valeurs (de plus en petites) de h. On tracera dans le même repère la courbe de l'exponentielle pour comparer, et on essaiera éventuellement d'animer le tout pour différentes valeurs de h. On peut même ajouter le champ de vecteurs correspondant si on le souhaite.

Vous pourrez ensuite tester le même genre de tracés pour l'équation non linéaire $y' = 1+y^2$ sur l'intervalle $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right[$ en partant du point $(0, 0)$ (normalement on devrait se rapprocher de la courbe de la tangente).

4 Un peu de suites récurrentes.

Comme on va sûrement prendre du retard sur les premières sections du TP, on ne va pas être trop ambitieux pour celle-ci. Contentez-vous d'essayer de tracer dans un même repère la courbe d'une fonction f (par exemple celles du DM $x \mapsto kx(1-x)$ pour la valeur de k dont vous avez envie), la droite d'équation $y = x$, et l'escargot/escalier formé par les premiers termes de la suite. On fixera par exemple une valeur de u_0, et on tracera, pour chaque valeur de $k \leq n$ (l'entier n étant choisi à l'avance), les segments reliant les points de coordonnées $(u_k, 0)$, $(u_k, f(u_k))$, $(f(u_k), f(u_k))$, $(f(u_k), 0)$ (le plus simple est de créer une liste de points qu'on complète au fur et à mesure). Tester, pour une même fonction f (par exemple quand $k = 6$), ce qui se passe pour différentes valeurs de u_0 et différentes valeurs de n.

5 Amusons-nous avec les fractales.

S'il nous reste encore un peu de temps, mais là je commence vraiment à en douter, il serait sympathique de terminer avec des représentations graphiques de fractales. On peut commencer avec le tapis de Sierpinski : on part d'un carré de côté 1, on le découpe en neuf petits carrés de côté $\frac{1}{3}$ (trois lignes, trois colonnes) et on colorie en noir le carré du milieu (sans toucher aux huit autres). On recommence la procédure sur chacun des huit carrés restants, et ainsi de suite. Faire dessiner à Maple ce qu'on obtient après une, deux, trois, quatre étapes dans cette procédure. Essayer d'écrire une procédure qui trace ce qu'on obtient au bout de n étapes, n étant un paramètre de la procédure.

Les plus courageux pourront ensuite s'intéresser au flocon de von Koch : on part d'un triangle équilatéral, et sur chacun de ses côtés, on efface le tiers central du segment pour le remplacer par deux autres segments de même longueur qui formeraient avec lui un triangle équilatéral externe au premier triangle. Et on recommence. Même question que pour le tapis de Sierpinski.