TP Maple n°1 : Suites, sommes, accélération de convergence

PTSI B Lycée Eiffel

17 janvier 2013

Pour cette première séance devant les ordinateurs, nous allons manipuler des objets que vous connaissez bien pour les avoir étudiés en cours de mathématiques ces dernières semaines : suites et sommes. On profitera de la puissance de calcul de Maple pour effectuer des calculs concrets de limites, équivalents et autres développements asymptotiques, et nous nous concentrerons notamment sur des techniques permettant d'accélérer la convergence de certaines suites vers leur limite.
Le but des TP étant de développer votre autonomie avec Maple, je n'expliquerai pas toujours ce que font toutes les commandes que que nous utiliserons, à vous de vous familiariser avec l'aide de Maple. Je vous rappelle notamment que pour avoir des informations sur la commande **zoinx** (non, ce n'est pas le nom d'une vraie commande Maple), il suffit de taper

[> ?zoinx

dans votre fenêtre de calcul Maple.

1 Commandes utiles, manipulations élémentaires.

Commençons avec des petits calculs de somme. Essayer de calculer la valeur de $\sum_{k=1}^{k=100} k^2$ en utilisant diverses méthodes : une boucle **for**, la commande Maple **sum**, l'autre commande Maple **add** (vous pouvez aussi tester tout cela en remplaçant le 100 en haut de la somme par un n). Tant que vous y êtes, débrouillez pour trouver des équivalents pour les calculs de produit, et faites calculer à Maple $\prod_{i=12}^{i=30} \frac{i}{i+1}$.
Passons maintenant aux suites, on va considérer par exemple la suite récurrente définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right)$. Écrire une procédure Maple calculant la valeur de u_n (pour un entier n choisi par l'utilisateur), et calculer u_{10} puis u_{20} (je rappelle que la commande **Digits** permet de gérer le nombre de décimales affichées). Faire tracer à Maple quelques chose qui permette de visualiser le comportement de la suite (je vous laisse farfouiller dans l'aide de la commande **plot** pour trouver des choses intéressantes, Maple est notamment capable de tracer une courbe reliant des points dont les coordonnées sont stockées dans une liste).

Un petit exercice pour récapituler ces manipulations, on considère dans ce qui suite la suite définie par $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

1. Calculer u_{30} et u_{100} par la méthode de votre choix.
2. On admet que la suite u_n converge vers le nombre e. Déterminer l'erreur commise (l'écart à la limite) en prenant u_{100} comme valeur approchée de e (on utilisera ici la commande **sum**).
3. Expliquer pourquoi $\sum_{k=0}^{100} \frac{1}{k!} = 2 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{4}(1 + \dots)\right)\right)$, en déduire une autre façon de calculer $e - u_{100}$ (on utilisera cette fois-ci une boucle **for**).

4. Comparer les résultats obtenus dans les deux calculs précédents et le temps mis par Maple pour effectuer les calculs.

2 Convergence, et plus si affinités

Passons aux choses plus sérieuses, avec des calculs de limites et autres équivalents. Commencez par essayer de calculer la limite d'une suite pas trop simple, par exemple $u_n = \dfrac{1-\cos(\frac{1}{n^2})}{\ln(1+\frac{1}{n})}$ en utilisant la commande **limit**. Vous pourrez ensuite tenter de faire des calculs d'équivalents et plus généralement de développements asymptotiques à l'aide de **leadterm** et de **series** (commencez par consulter l'aide de cette dernière commande). Pour les exemples, prenez tous ceux qu'on a vus dans la feuille d'exercices sur les suites. Vous pouvez par exemple retrouver l'équivalent et un développement asymptotique de la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

Reprenez l'exemple de suite implicite étudiée en cours. Je rappelle qu'on a noté u_n la plus petite solution de l'équation $e^x = nx$. Faites résoudre cette équation à Maple (les différents avatars de la commande **solve** deviendront vite vos grands amis en TP de Maple, autant se familiariser avec eux tout de suite). Déterminer ensuite un développement asymptotique de u_n.

3 Accélération de convergence

Le but des procédés décrits dans cette partie est de transformer une suite (u_n) convergeant vers une limite l en une autre suite (v_n) convergeant également vers l, mais « plus vite » que (u_n). Techniquement, cela signifie qu'on cherche à avoir $v_n - l = o(u_n - l)$. Une première possibilité d'accélération de convergence est d'utiliser la méthode d'Euler (rien à voir avec la méthode du même nom vue pour la résolution approchée d'équations différentielles) :

Théorème 1. *Si la suite (u_n) admet un développement asymptotique de la forme $u_n = l+\alpha r^n+o(r^n)$, avec $|r|<1$, alors la suite (v_n) définie par $v_n = \dfrac{x_{n+1}-rx_n}{1-r}$ converge également vers l et $v_n - l = o(u_n - l)$.*

Démontrer ce théorème (non, vous n'échapperez pas à quelques questions de maths en TP de Maple). Attention, on ne peut appliquer ce procédé que si (u_n) est du type précisé. Si on a par exemple $u_n = l + \dfrac{\alpha}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ (qui n'est pas du type voulu), on peut tout de même s'en sortir en appliquant la méthode d'Euler à la suis-suite (u_{2^n}).

On considère la suite $u_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$. Déterminer sa limite et donnez-en un début de développement asymptotique. À l'aide de ce qui précède, construire une suite (v_n) convergeant vers la même limite plus vite que (u_n).

On peut améliorer la méthode d'Euler si on connait un développement asymptotique de (u_n) plus précis (le procédé porte alors le nom de méthode de Richardson). Si $u_n = l+\alpha_1 r_1^n+\alpha_2 r_2^n+\dots\alpha_k r_k^n$, avec $0<|r_k|<\dots<|r_1|<1$, alors on construit des suites (v_n^1), (v_n^2), ..., (v_n^k) convergeant de plus en plus rapidement vers l en posant $v_n^1 = \dfrac{x_{n+1}-r_1x_n}{1-r}$; puis, pour tout entier $i \leq k$, $v_n^i = \dfrac{v_{n+1}^{i-1}-r_iv_n^i}{1-r_i}$. Comme dans le cas de la méthode d'Euler, on appliquera la procédure à la sous-suite (u_{2^n}) si besoin. Reprendre l'exemple précédent, et construire les premiers termes des suites (v_n^2), (v_n^3), (v_n^4) et (v_n^5). On se contentera des cinq premiers termes de chaque suite.

Une dernière méthode pour accélérer la convergence, qui a le mérite de ne pas nécessiter la connaissance des coefficients r_i, est la méthode d'Aitken, qui procède ainsi : on pose cette fois $v_n = u_n - \dfrac{(\Delta u_n)^2}{\Delta^2 u_n}$, où on pose $\Delta u_n = u_{n+1} - u_n$.

Théorème 2. *Si (u_n) a un développement asymptotique de la forme $u_n = l + \alpha r^n + o(r^n)$, avec $|r| < 1$, alors la suite (v_n) converge vers l, et $v_n - l = o(u_n - l)$.*

Essayez de démontrer ce théorème si vous êtes courageux. Sinon, contentez-vous d'appliquer ce procédé à la suite définie par $u_n = 4\sum_{k=1}^{k=n} \dfrac{(-1)^k}{2k+1}$ (vers quoi converge-t-elle ?), puis à la suite définie par $u_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2^{\frac{n+1}{2}}\sqrt{1-\sqrt{1-\left(\dfrac{u_n}{2^n}\right)^2}}$ (quelle est sa limite ?). On pourra écrire plus généralement une procédure Maple prenant comme arguments la suite (u_n) et l'entier n, et qui calcule v_n.