TD n°9 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

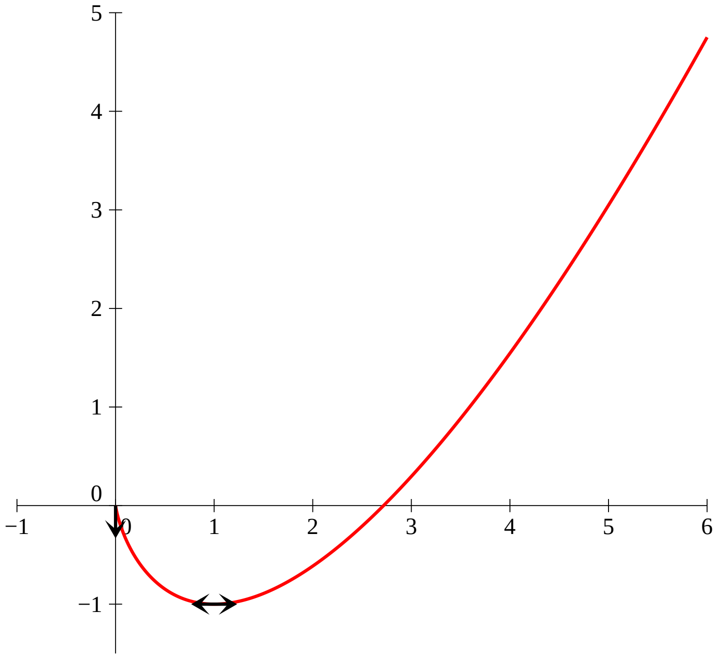
19 mars 2013

Fonctions gentilles

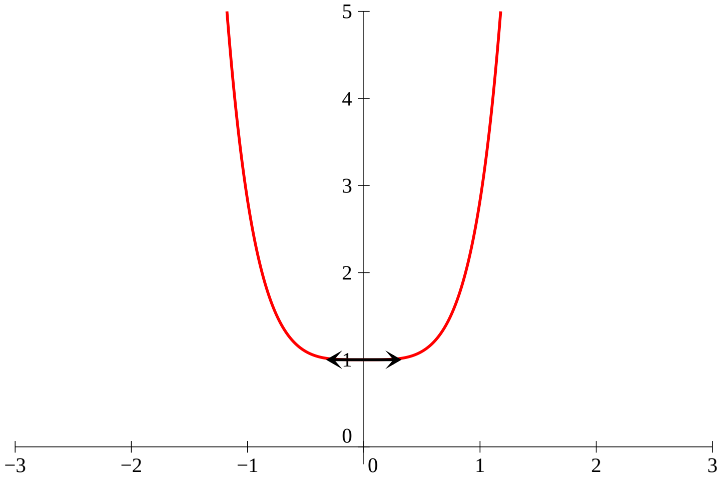
- La fonction f_1 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$, de dérivée $f'(x) = \ln(x) + x \times \dfrac{1}{x} - 1 = \ln(x)$. Puisque $\lim\limits_{x \to 0} f_1(x) = 0$ (croissance comparée), on peut prolonger la fonction par continuité en posant $f_1(0) = 0$. De plus, $\lim\limits_{x \to 0} f_1'(x) = -\infty$, donc la fonction prolongée admet en 0 une (demi)-tangente verticale.

x	0		1		$+\infty$
f_1	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

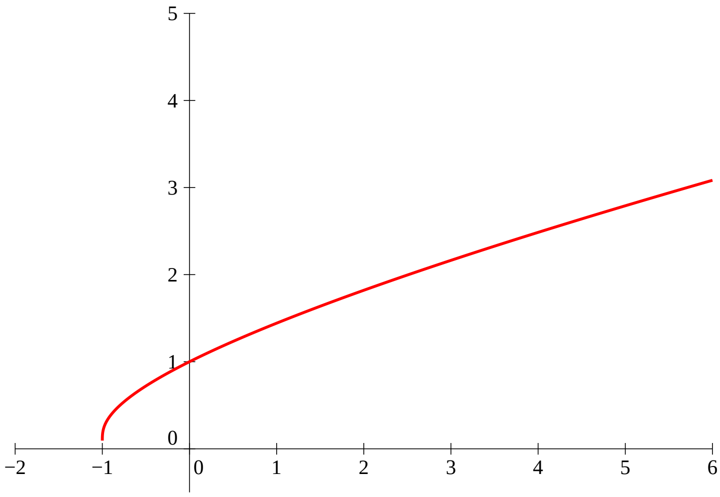
On peut ici continuer l'étude : $f_1''(x) = \dfrac{1}{x}$, donc f_1 est convexe sur $\mathbb{R}^+$, et elle admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction (Oy) puisque $f_2(x) \underset{+\infty}{\sim} x\ln(x)$. Une allure de la courbe :



- La fonction f_2 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ puisque $x^4 + 1$ est toujours strictement positif. Elle est par ailleurs paire. Pour les variations, écrivons $f_2(x) = (x^4+1)^{\frac{3}{2}}$ pour obtenir $f_2'(x) = \dfrac{3}{2} \times 4x^3 \times (x^4+1)^{\frac{1}{2}} = 6x^3\sqrt{x^4+1}$. La fonction est donc décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et croissante sur $\mathbb{R}_+$. En $\pm\infty$, on peut écrire $f_2(x) \sim (x^4)^{\frac{3}{2}} \sim x^6$, il y a donc des branches paraboliques de direction (Oy). De plus, $f_2''(x) = 18x^2\sqrt{x^4+1} + 6x^3\dfrac{4x^3}{2\sqrt{x^4+1}} = \dfrac{18x^2(x^4+1)+12x^6}{\sqrt{x^4+1}}$, qui est très positif sur $\mathbb{R}$. La fonction est donc convexe. En voici une allure :



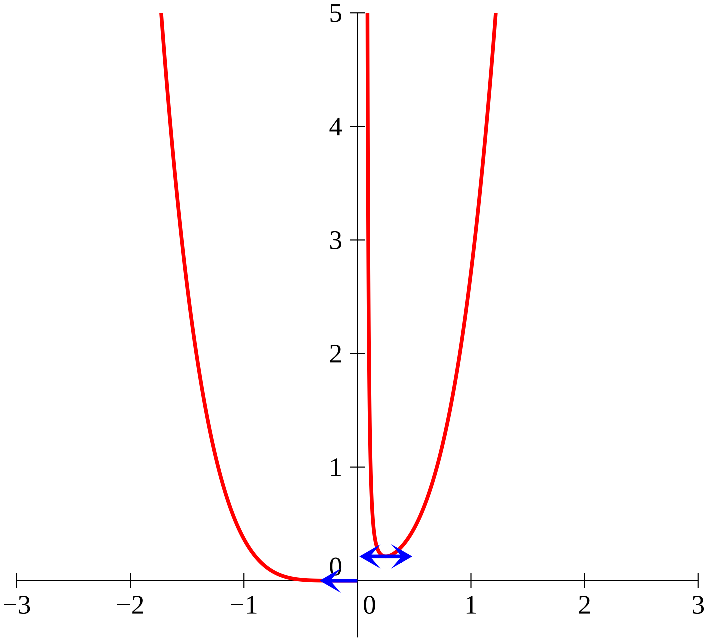
- La fonction f_3 est définie et dérivable sur $]-1;+\infty[\backslash\{0\}$, de dérivée $f_3'(x) = \dfrac{\ln(x+1) - \frac{x}{x+1}}{\ln^2(x+1)} = \dfrac{(x+1)\ln(x+1) - x}{(x+1)\ln^2(x+1)}$. Cette dérivée est du signe de son numérateur, dont la dérivée vaut $\dfrac{x+1}{x+1} + \ln(x+1) - 1 = \ln(x+1)$. Ce numérateur admet donc un minimum en 0, de valeur 0. Autrement dit, la dérivée de f_3 est toujours positive, et la fonction croissante. Notons que $\lim\limits_{x\to 0} f_3(x) = 1$ (en utilisant l'équivalent classique $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$), et on peut même prouver que ce prolongement est dérivable, mais ce n'est pas du tout évident avec nos outils. Un calcul de dérivée seconde n'est par ailleurs pas très engageant ici, on se contentera de nos maigres informations pour tracer l'allure de la courbe :



- La fonction f_4 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$, de dérivée $f_4'(x) = 4x^3e^{\frac{1}{x}} + x^4 \times \dfrac{-1}{x^2}e^{\frac{1}{x}} = x^2(4x-1)e^{\frac{1}{x}}$. La fonction f_4 est prolongeable par continuité en 0, mais seulement par continuité à gauche, puisque $\lim\limits_{x\to 0-} f_4(x) = 0$ (il n'y a pas de forme indéterminée), mais $\lim\limits_{x\to 0^+} f_4(x) = +\infty$ (par croissance comparée). Ce prolongement est dérivable à gauche, $f_4'(x)$ tendant également vers 0 en 0^-. La courbe admettra donc une demi-tangente horizontale à gauche en 0.

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{4}$		$+\infty$
f_4	$+\infty$	$\searrow$	$0 \,\|\, +\infty$	$\searrow$	$\frac{e^4}{256} \simeq 0.21$	$\nearrow$	$+\infty$

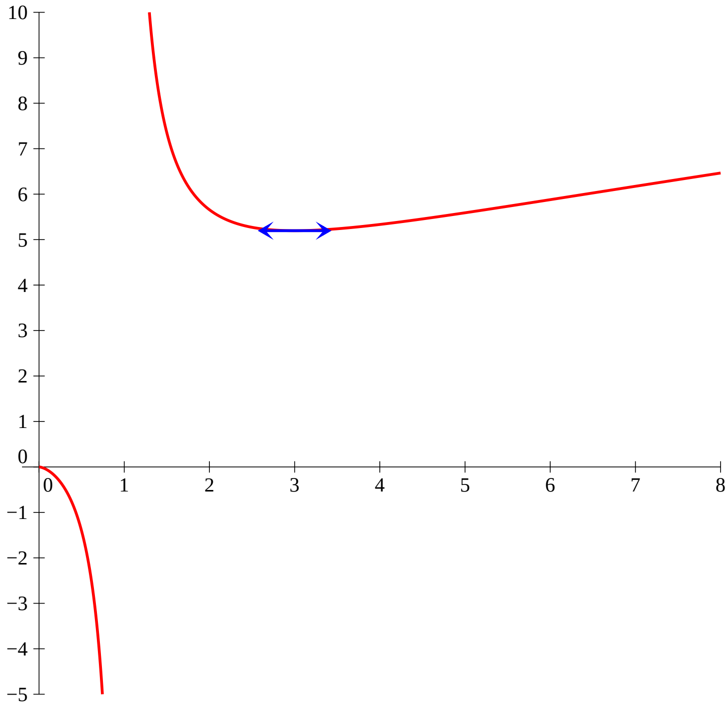
On peut constater que $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$, donc $f_4(x) \underset{\pm\infty}{\sim} x^4$, ce qui prouve la présence de branches paraboliques de direction (Oy). De plus, $f_4''(x) = (12x^2-2x)e^{\frac{1}{x}} - (4x-1)e^{\frac{1}{x}} = (12x^2-6x+1)e^{\frac{1}{x}}$. Le trinôme $12x^2 - 6x + 1$ ayant un discriminant négatif, cette dérivée seconde est toujours positive, et la fonction est donc convexe sur $\mathbb{R}_-$ et sur $\mathbb{R}^{+*}$. Une allure de courbe :



- La fonction f_5 est définie et dérivable sur $[0;1[\cup]1;+\infty[$ (le numérateur est bien dérivable en 0, on peut l'écrire sous la forme $x^{\frac{3}{2}}$), de dérivée $f_5'(x) = \dfrac{3\sqrt{x}(x-1) - 2x^{\frac{3}{2}}}{(x-1)^2} = \dfrac{\sqrt{x}(x-3)}{(x-1)^2}$. Pas de prolongement par continuité envisageable en 1 puisque le numérateur de la fonction vaut 2 quand x tend vers 1.

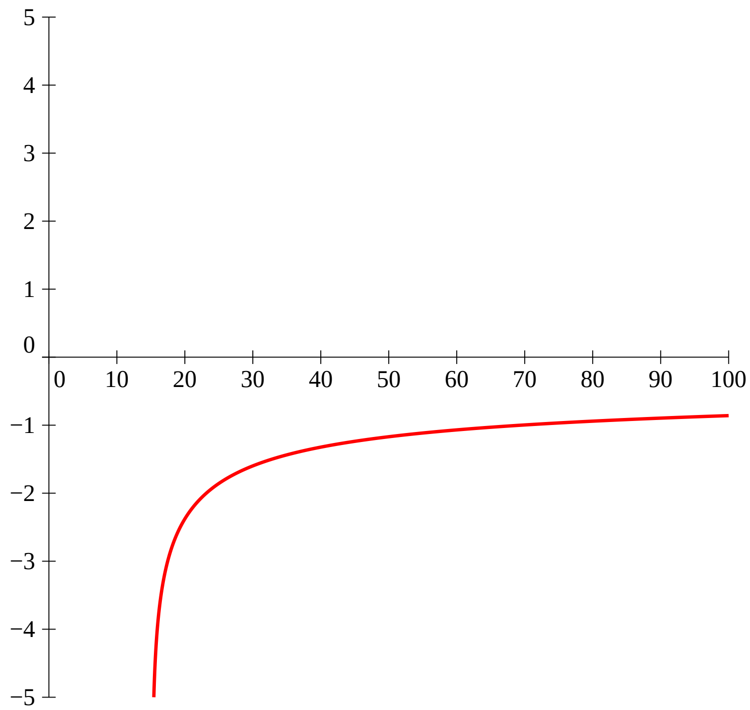
x	0		1		3		$+\infty$
f_5	0	$\searrow$	$-\infty \,\|\, +\infty$	$\searrow$	$3\sqrt{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

Comme $f_5(x) \underset{+\infty}{\sim} 2\sqrt{x}$, la courbe admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction (Ox). On peut s'amuser à calculer $f_5''(x) = \dfrac{\frac{x-3}{2\sqrt{x}}(x-1)^2 + \sqrt{x}(x-1)^2 - 2\sqrt{x}(x-3)(x-1)}{(x-1)^4}$ $= \dfrac{(x-3)(x-1) + 2x(x-1) - 4x(x-3)}{2\sqrt{x}(x-1)^3} = \dfrac{-x^2+6x+3}{\sqrt{x}(x-1)^3}$. Le numérateur a pour discriminant $\Delta = 36 + 12 = 48$, il s'annule en $x_1 = \dfrac{-6+\sqrt{48}}{-2} < 0$ (valeur à oublier ici), et $x_2 = \dfrac{-6-\sqrt{48}}{-2} = 3 + 2\sqrt{3}$. La fonction f_5 est donc concave sur $[0;1[$ (le dénominateur de la dérivée seconde est alors négatif), convexe sur $]1; 3+2\sqrt{3}]$ et concave sur $[3+2\sqrt{3}; +\infty[$. Voici l'allure de la courbe (je n'ai pas placé la tangente au point d'inflexion, le calcul de sa pente étant fastidieux) :

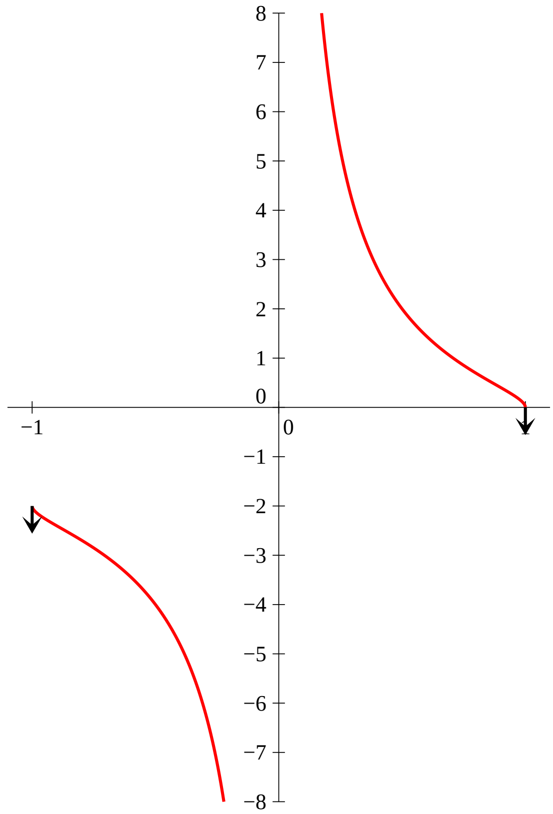


Fonctions rigolotes

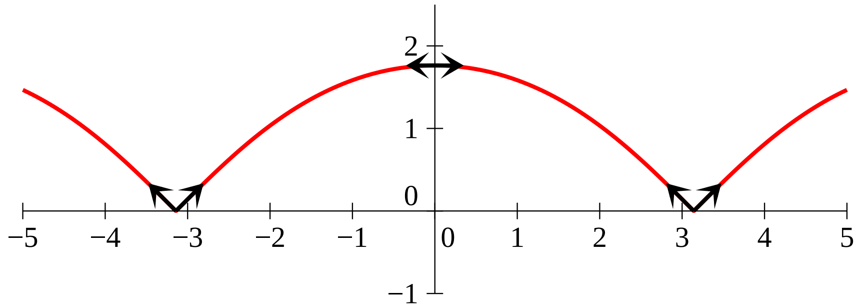
- Pour que la fonction g_1 soit définie, il faut avoir $\ln(\ln(\ln(x))) > 0$, donc $\ln(\ln(x)) > 1$, donc $\ln(x) > e$, soit enfin $x > e^e$. La fonction est dérivable (et accessoirement croissante puisque composée de fonctions croissantes) sur son domaine de définition. Calculons tout de même sa dérivée, en procédant par compositions successives : $(\ln(\ln(x)))' = \dfrac{1}{x}\dfrac{1}{\ln(x)} = \dfrac{1}{x\ln(x)}$, donc $(\ln(\ln(\ln(x))))' = \dfrac{1}{x\ln(x)} \times \dfrac{1}{\ln(\ln(x))}$, puis $g_1'(x) = \dfrac{1}{x\ln(x)\ln(\ln(x))\ln(\ln(\ln(x)))}$. Il est (heureusement) inutile de calculer la dérivée seconde pour déterminer la concavité de la fonction : le dénominateur de la dérivée est une fonction strictement croissante et positive sur notre ensemble de défition, donc g_1' est décroissante et g_1 est concave (ce qui est cohérent si on songe qu'on parle de la courbe de ln et qu'on l'aplatit de plus en plus). Une allure de la courbe de cette fonction finalement peu intéressante (notons que la fonction s'annule en e^{e^e}, qui vaut plus de trois millions, la courbe a tout de même pour limite $+\infty$ en $+\infty$, mais la croissance est exceptionnellement lente !) :



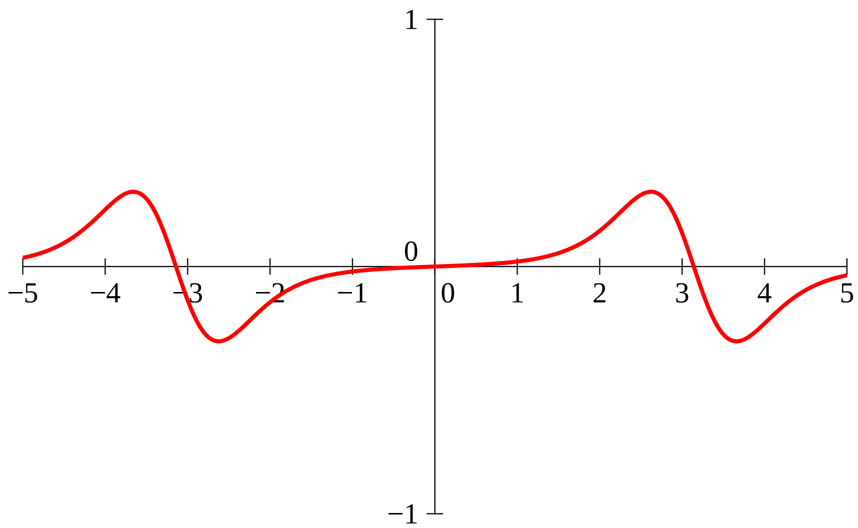
- La fonction g_2 est définie sur $[-1;1]\backslash\{0\}$ et a priori dérivable sur $]-1;0[$ et sur $]0;1[$, de dérivée $g_2'(x) = \dfrac{-\frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{\arccos(x)}{\sqrt{1-x^2}}}{\arcsin^2(x)} = -\dfrac{\pi}{2\sqrt{1-x^2}\arcsin^2(x)}$ en utilisant le fait que $\arccos(x) + \arcsin(x) = \dfrac{\pi}{2}$. La fonction est donc décroissante sur chacun de ses deux intervalles de définition. Pas de prolongement envisageable en 0, où la fonction admet des limites infinies puisque $\arccos(0) = \dfrac{\pi}{2}$. En -1, on a $g_2(-1) = \dfrac{\pi}{-\frac{\pi}{2}} = -2$, et la courbe admet une tangente verticale en ce point, puisque la dérivée y tend vers $-\infty$. De même en 1, où on a $g_2(1) = \dfrac{0}{\frac{\pi}{2}} = 0$. Dans un grand élan de motivation, on peut tenter de calculer la dérivée seconde : $g_2''(x) = \dfrac{\pi}{2(1-x^2)\arcsin^4(x)} \times \left(\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\arcsin^2(x) + 2\arcsin(x)\right)$. Inutile d'aller plus loin, on ne saura pas étudier le signe de cette fonction. Mais les limites inifnies et les tangentes verticales imposent la présence d'au moins un point d'inflexion sur chacun des deux intervalles de définition de la fonction.



- La fonction g_3 est définie lorsque $2+\cos(x) \geq 1$, ce qui est toujours vrai. Par contre, elle n'est a priori dérivable que si $2+\cos(x) \neq 1$, puisque Argch n'est pas dérivable en 1, donc n'est pas dérivable si $x = (2k+1)\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$. Sa dérivée vaut $g_3'(x) = -\dfrac{\sin(x)}{\sqrt{(2+\cos(x))^2 - 1}}$. Inutile de développer le dénominateur, on sait déjà que ce qui est sous la racine carrée sera toujours potitif, mais s'annulera pour $x = (2k+1)\pi$. Le numérateur s'annulant également pour ces valeurs, il se pourrait toutefois que la fonction y soit dérivable. Comme g_3 est 2π-périodique, on peut se contenter de regarder ce qui se passe en π. On peut alors écrire $g_3'(x) = \dfrac{\sin(x-\pi)}{\sqrt{(2-\cos(x-\pi))^2 - 1}}$. Posons $X = x - \pi$, qui aura le bon goût de tendre vers 0. On cherche alors la limite en 0 de $h(X) = \dfrac{\sin(X)}{\sqrt{4 - 4\cos(X) + \cos^2(X) - 1}}$. Le trinôme sous la racine peut se factoriser, 1 étant racine évidente, sous la forme $3 - 4\cos(X) + \cos^2(X) = (1-\cos(X))(3-\cos(X))$. On obtient alors, en utilisant l'équivalent classique de $1-\cos(X)$ en 0, $h(X) = \dfrac{\sin(X)}{\sqrt{(1-\cos(X))(3-\cos(X))}} \underset{0}{\sim} \dfrac{X}{\sqrt{\frac{X^2}{2} \times 2}} \sim 1$ si $X \geq 0$ (ça tend vers -1 en 0^- puisqu'on a alors $\sqrt{X^2} = -X$). Ouf, finalement, $\lim\limits_{x \to \pi_+} g_3'(x) = 1$, et $\lim\limits_{x \to \pi_-} g_3'(x) = -1$. En chaque point de la forme $(2k+1)\pi$, la fonction g_3 admet donc deux demi-tangentes (mais n'est pas dérivable), de pente -1 à gauche et de pente 1 à droite. La dérivée étant par ailleurs de signe opposé à celui de $\sin(x)$, la fonction g_3 est croissante sur chaque intervalle $[(2k-1)\pi; 2k\pi]$, et décroissante sur les intervalles $[2k\pi; (2k+1)\pi]$. Les maxima locaux se trouvent tous à une hauteur $\text{Argch}(3) = \ln(3+\sqrt{8})$ (je me permets d'utiliser a formule $\text{Argch}(x) = \sqrt{x + \sqrt{x^2-1}}$ vue en exercice en début d'année, mais qui est hors programme ; sinon on résout l'équation $\text{ch}(x) = 3$ en revenant aux exponentielles et en se ramenant à une équation du second degré, ce n'est pas très compliqué), les minima locaux, qui correspondent aux points où la fonction n'est pas dérivable, sont à hauteur $\text{Argch}(1) = 0$. La dérivée seconde vaut $g_3''(x) = \dfrac{-\cos(x)(1+\cos(x))(3+\cos(x)) + \sin(x)(-4\sin(x) - 2\sin(x)\cos(x))}{(1+\cos(x))(3+\cos(x))} = \dfrac{\cos^3(x) - 3\cos(x) - 4}{(1+\cos(x))(3+\cos(x))}$ si je ne me suis pas trompé dans les calculs (on remplace évidemment tous les $\sin^2$ par des $1-\cos^2$). Miracle, le numérateur est tout le temps négatif, donc la fonction est concave sur chcaun de ses intervalles de dérivabilité. Une allure de courbe :



- La fonction g_4 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $g_4'(x) = \dfrac{\cos(x)(\cos(x)+2)^4 + 4\sin^2(x)(\cos(x)+2)^3}{(\cos(x)+2)^8} = \dfrac{\cos^2(x) + 2\cos(x) + 4\sin^2(x)}{(\cos(x)+2)^5}$ $= \dfrac{-3\cos^2(x) + 2\cos(x) + 4}{(\cos(x)+2)^5}$. On peut poser $X = \cos(x)$ pour chercher les valeurs d'annulation de la dérivée : $-3X^2 + 2X + 4$ a pour discriminant $\Delta = 4 + 48 = 52$ et admet deux racines réelle $X_1 = \dfrac{-2-\sqrt{52}}{-6} = \dfrac{1+\sqrt{13}}{3}$, qui est strictement supérieure à 1 donc à oublier pour ce qui nous concerne, et $X_2 = \dfrac{1-\sqrt{13}}{3}$, qui est négative et supérieure à -1. La dérivée s'annule donc pour $x = \pm \arccos\left(\dfrac{1-\sqrt{13}}{3}\right) + 2k\pi$ (puisque la fonction est évidemment 2π-périodique, mais aussi impaire). Les plus curieux constateront que $\dfrac{1+\sqrt{13}}{3}$ est très proche de $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, ce qui signifie que les maxima sont proches de $\pm\dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi$. On pourrait calculer la valeur exacte de $g_4(x)$ pour ces valeurs (on connait le cosinus et le sinus s'en déduit) mais ça présente pas franchement d'interêt. Je ne parle même pas de la dérivée seconde qui va être horrible (mais qu'on pourra sûrement mettre sous forme de polynôme en $\cos(x)$ au numérateur). Une allure de la courbe :



- Il faut déjà réussir à déterminer le domaine de définition de cette fonction. Pour qu'elle soit définie, il faut avoir $\text{sh}(x) \in [-1;1]\backslash\{0\}$. La fonction sh étant strictement croissante, impaire (la fonction g_5 sera donc aussi impaire), et s'annulant donc en 0, il suffit de résoudre l'équation $\text{sh}(x) = 1$, soit $e^x - e^{-x} = 2$. En posant $X = e^x$, on se ramène à $X^2 - 2X - 1 = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 4 + 4 = 8$, et admet pour unique racine positive $X = \dfrac{2+\sqrt{8}}{2} = 1 + \sqrt{2}$. Autrement dit, $\text{sh}(x) = 1$ pour $x = \ln(1+\sqrt{2})$. On en déduit que $\mathcal{D}_{g_5} = [-\ln(1+\sqrt{2}); 0[\cup]0; \ln(1+\sqrt{2})]$. Aucun prolongement par continuité envisageable en 0, où les limites seront infinies. Par contre, la fonction est définie en $\pm\ln(1+\sqrt{2})$, et $g_5(\ln(1+\sqrt{2}) = \dfrac{1}{\arcsin(1)} = \dfrac{2}{\pi}$. La fonction est dérivable sur son domaine de définition, sauf a priori en $\pm\ln(1+\sqrt{2})$ puisque arcsin n'est pas dérivable en -1 et en 1. Sa dérivée vaut $\dfrac{-\frac{\text{ch}(x)}{\sqrt{1-\text{sh}^2(x)}}}{\arcsin^2(\text{sh}(x))}$, qui est très clairement négative partout où elle est définie. Il y aura par ailleurs des tangentes verticales en $\pm\ln(1+\sqrt{2})$, où la dérivée a des limites infinies. On ne se lancera pas dans un calcul de dérivée seconde ici, voici une allure de la courbe :