TD n°8 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

19 février 2013

Exercice 1

C'est du simple calcul, on obtient $AB = \begin{pmatrix} 8 & 0 & -4 \\ -2 & -3 & 5 \\ -6 & -1 & 5 \end{pmatrix}$; $AD = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -6 & 5 \\ -7 & 0 \end{pmatrix}$; $BA = \begin{pmatrix} 12 & -2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$; $BC = \begin{pmatrix} 8 & 14 & 4 \\ 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}$; $CA = \begin{pmatrix} -2 & 8 \\ 3 & -14 \\ -1 & -7 \end{pmatrix}$; et $DB = \begin{pmatrix} 14 & -1 & -5 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$, ainsi que $C^2 = \begin{pmatrix} 4 & -12 & 10 \\ 0 & 22 & -3 \\ 0 & 9 & 1 \end{pmatrix}$ et $D^2 = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 2

On calcule facilement $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, puis $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Soit en constatant que le dernier coefficient de la première ligne augmente de $n-1$ à chaque étape, ou en reconnaissant dans cette première ligne le début de la ligne numéro n du triangle de Pascal, on conjecture que $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. il ne reste plus qu'à le prouver par récurrence. L'initialisation a largement été faite avec les premiers calculs, supposons donc la formule vrai au rang n, alors $A^{n+1} = A^n \times A = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1+n & n+\frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & 1+n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, avec $n + \dfrac{n(n-1)}{2} = \dfrac{n(2+n-1)}{2} = \dfrac{n(n+1)}{2}$, ce qui prouve la formule au rang $n+1$ et achève la récurrence.

Exercice 3

Soit $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ la matrice recherchée. On calcule $M = \begin{pmatrix} x^2+yz & xy+yt \\ zx+tz & yz+t^2 \end{pmatrix}$. On se retrouve donc devant le système suivant à résoudre : $\left\{ \begin{array}{ccccc} x^2 & + & yz & = & -5 \\ xy & + & yt & = & -4 \\ zx & + & tz & = & 6 \\ yz & + & t^2 & = & -5 \end{array} \right.$

Inutile de chercher à résoudre ce système par des moyens classiques, en l'occurence un peu d'astuce permet de s'en sortir rapidement. La différence des équations extrêmes donne $x^2 - t^2 = 0$, c'est-à-dire que $x = t$ ou $x = -t$. La deuxième possibilité peut immédiatement être exclue, pusique les deux équation médianes deviennent alors $0 = -4$ et $0 = 6$, ce qui n'est pas très crédible. On en déduit que $t = x$, puis $y = -\dfrac{2}{x}$ et $z = \dfrac{3}{x}$ via les équations médianes (x ne peut pas être nul). En reportant dans la première équation, on a donc $x^2 - \dfrac{6}{x^2} = -5$, soit $x^4 + 5x^2 - 6 = 0$. Posons $X = x^2$, la trinôme $X^2 + 5X - 6$ a pour discriminant $\Delta = 25 + 24 = 49$ et admet deux racines $X_1 = \dfrac{-5+7}{2} = 1$ et $X_2 = \dfrac{-5-7}{2} = -6$. Si on reste dans $\mathbb{R}$, les seules possibilités sont $x = 1$ et $x = -1$, soit $M = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ ou $M = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$. Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, il y a deux solutions supplémentaires : $M = \begin{pmatrix} i\sqrt{6} & -\dfrac{2i}{\sqrt{6}} \\ \dfrac{3i}{\sqrt{6}} & \dfrac{i}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} -i\sqrt{6} & \dfrac{2i}{\sqrt{6}} \\ -\dfrac{3i}{\sqrt{6}} & -\dfrac{i}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$.

Exercice 4

Pour l'instant, on va résoudre par des méthodes type lycée, mais ça ne nous empêche pas d'essayer de faire des choses intelligentes quand même. Pour le premier système, on peut additionner les équation extrêmes pour obtenir $y + 4z = 14$, soit $y = 14 - 4z$. En reportant dans la première équation, on a donc $x = 6 + 2y - 3z = 6 + 28 - 8z - 3z = 34 - 11z$. Reportons tout dans la deuxième équation : $68 - 22z + 14 - 4z - 2z = -2$, soit $-28z = -84$, donc $z = 3$; puis $y = 14 - 12 = 2$ et enfin $x = 34 - 33 = 1$. Finalement, $\mathcal{S} = \{1; 2; 3\}$.

Pour le deuxième système, en additionnant les deux premières équations on a immédiatement $3x = -1$, soit $x = -\dfrac{1}{3}$. On reporte alors dans les deux dernières équations : $-y - z = -4 + \dfrac{2}{3} = -\dfrac{10}{3}$; et $3y + 3z = 11 - 1 = 10$. Les deux équations sont équivalentes, le système a donc une infinité de solution, de la forme $\mathcal{S} = \left\{ \left(-\dfrac{1}{3}; y; \dfrac{10}{3} - y \right) \right\}$.

Exercice 5

Pour ce dernier système, je vais présenter les calculs sous forme de pivot :

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} (1-m)x & + & 2y & - & z & = & 0 \\ -2x & - & (3+m)y & + & 3z & = & 0 \\ x & + & y & - & (2+m)z & = & 0 \end{array} \right. \qquad L_1 \leftrightarrow L_3$$

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & (2+m)z & = & 0 \\ -2x & - & (3+m)y & + & 3z & = & 0 \\ (1-m)x & + & 2y & - & z & = & 0 \end{array} \right. \qquad \begin{array}{c} \\ L_2 \leftarrow 2L_1 + L_2 \\ L_3 \leftarrow (1-m)L_1 - L_3 \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} (1-m)x & + & 2y & - & z & = & 0 \\ & & (-1-m)y & - & (1+2m)z & = & 0 \\ & & (-1-m)y & + & (1-(1-m)(2+m))z & = & 0 \end{array} \right.$$

En soustrayant les deux dernières équations, on obtient $(1 - (1-m)(2+m) + 1 + 2m)z = 0$, soit $(1 - 2 - m + 2m + m^2 + 1 + 2m)z = (m^2 + 3m)z = 0$. Si $m \neq 0$ et $m \neq -3$, on a donc $z = 0$. Ensuite, on a alors $y = 0$ si $m \neq -1$, puis $x = 0$. Il y a trois cas particuliers.

Pour $m = 0$, en gardant les deux premières équations du système triangulaire obtenu, on a

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & - & z & = & 0 \\ & & -y & - & z & = & 0 \end{array} \right.$$

soit $y = -z$ puis $x = z - 2y = 3z$, donc $\mathcal{S} = \{(3z; -z; z) \mid z \in \mathbb{R}\}$.

Pour $m=-3$, en gardant ces mêmes équations, on a :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} 4x & + & 2y & - & z & = & 0 \\ & & 2y & + & 5z & = & 0 \end{array}\right.$$

soit $y=-\dfrac{5}{2}z$ puis $x=\dfrac{1}{4}(z-2y)=\dfrac{3}{2}z$, donc $\mathcal{S}=\{(\frac{3}{2}z;-\frac{5}{2}z;z)\mid z\in\mathbb{R}\}$.

Enfin, quand $m=-1$, on a $z=0$, c'est cette fois-ci la deuxième équation qui est toujours vérifiée, et la première devient $2x+2y-z=0$, soit $x=-y$, donc $\mathcal{S}=\{(-y;y;0)\mid y\in\mathbb{R}\}$.