TD n°7 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

8 février 2013

Problème 1 : Dérivations dans un anneau.

Des exemples

1. Il suffit de vérifier que, si f et g sont deux fonctions dérivables, alors $(f+g)' = f' + g'$, et que $(fg)' = fg' + f'g$, ce qui est vrai. Par contre, la dérivation seconde n'est pas une dérivation puisque $(f+g)'' = f'' + g''$, mais $(fg)'' = fg'' + 2f'g' + f''g \neq f''g + fg''$.
2. Si x et y commutent, $[x, y] = 0$. Il est immédiat que $[y, x] = yx - xy = -[x, y]$. De plus, $[x, y+z] = x(y+z) - (y+z)x = xy + xz - yx - zx = xy - yx + xz - zx = [x, y] + [x, z]$.
3. C'est un calcul pas très subtil : $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = x(yz - zy) - (yz - zy)x + y(zx - xz) - (zx - xz)y + z(xy - yx) + (xy - yx)z = xyz - xzy - yzx + zyx + yzx - yxz - zxy + xzy + zxy - zyx - xyz + yxz = 0$.
4. Il faut vérifer deux choses : d'une part que $d_x(y+z) = d_x(y) + d_x(z)$, soit $[x, y+z] = [x, y] + [x, z]$, ce qu'on a déjà démontré plua haut : et d'autre part que $d_x(yz) = yd_x(z) + d_x(y)z$, soit $[x, yz] = y[x, z] + [x, y]z$. En effet, $[x, yz] = xyz - yzx$, et $y[x, z] + [x, y]z = y(xz - zx) + (xy - yx)z = yxz - yzx + xyz - yxz = xyz - yzx$.

Propriétés générales des dérivations.

1. En appliquant la formule avec la somme à $x = y = 0$, on obtient $d(0+0) = d(0) + d(0)$, soit $d(0) = d(0) + d(0)$, ce qui implique $d(0) = 0$. En ppliquand la formule avec le produit à $x = y = 1$, $d(1 \times 1) = 1 \times d(1) + d(1) \times 1$, soit $d(1) = d(1) + d(1)$, donc $d(1) = 0$.
2. Prenons $y = -x$ dans la formule de la somme : $d(x - x) = d(x) + d(-x)$, or $d(x - x) = d(0) = 0$, donc on trouve $d(-x) = -d(x)$. En prenant $y = x^{-1}$ dans la formule du produit, $d(xx^{-1}) = xd(x^{-1}) + d(x)x^{-1}$, or $d(1) = 0$ donc $xd(x^{-1}) = -d(x)x^{-1}$, soit $d(x^{-1}) = x^{-1}d(x)x^{-1}$. Dans le cas où tout ce beau monde commute, on trouve $d(x^{-1}) = -d(x)x^{-2}$, ce qui correspond à la formule de dérivation classique $\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$.
3. En utilisant plusieurs fois de suite la formule pour le produit, on obtient $d(x_1x_2x_3) = x_1d(x_2x_3) + d(x_1)x_2x_3 = x_1x_2d(x_3) + x_1d(x_2)x_3 + d(x_1)x_2x_3$, puis plus généralement $d(x_1x_2 \dots x_n) = x_1 \dots x_{n-1}d(x_n) + x_1 \dots x_{n-2}d(x_{n-1})x_n + \dots d(x_1)x_2 \dots x_n = \sum_{i=1}^{n} x_1 \dots x_{i-1}d(x_i)x_{i+1} \dots x_n$.
4. En appliquant la formule précédente avec tous les x_i égaux à x, on trouve $d(x^n) = \sum_{i=1}^{n} x^{i-1}d(x)x^{n-i}$.

   Par exemple, pour $n = 4$, $d(x^4) = x^3d(x) + x^2d(x)x + xd(x)x^2 + d(x)x^3$. Dans le cas où $d(x)$ commute avec x, on trouve plus simplement $d(x^n) = nx^{n-1}d(x)$, ce qui fait évidemment penser à la formule bien connue $(f^n)' = nf^{n-1}f'$.
5. On a déjà vu plus haut que les deux éléments neutres appartenaient à $B = \{x \mid d(x) = 0\}$. De plus, si $d(x) = d(y) = 0$, alors $d(x+y) = d(x) + d(y) = 0 + 0 = 0$, donc B est stable par somme. On a également $d(-x) = -d(x) = 0$, donc B est stable par passage à l'opposé. Enfin,

$d(xy) = xd(y) + d(x)y = X \times 0 + 0 \times y = 0$, donc B est stable par produit. L'ensemble B est donc un sous-anneau de A. Dans le cas où A est un corps, ona aura toujours, si $x \in B$, $d(x^{-1}) = -x^{-1}d(x)x^{-1} = -x^{-1} \times 0 \times x^{-1} = 0$, donc B est également stable par passage à l'inverse.

Pour aller un peu plus loin.

1. Si d_1 et d_2 sont des dérivations, $d_1(x+y) + d_2(x+y) = d_1(x) + d_1(y) + d_2(x) + d_2(y) = (d_1+d_2)(x) + (d_1+d_2)(y)$; de plus $d_1(xy) + d_2(xy) = xd_1(y) + d_1(x)y + xd_2(y) + d_2(x)y = x((d_1+d_2)(y)) + ((d_1+d_2)(x))y$, donc $d_1 + d_2$ est bien une dérivation. Par contre, ce n'est pas toujours le cas de la composée, on a vu à la première question que la dérivation seconde, qui est la composée de la dérivation par elle-même, n'est plus une dérivation.
2. Calculons donc $d_1(d_2(x+y)) - d_2(d_1(x+y)) = d_1(d_2(x) + d_2(y)) - d_2(d_1(x) + d_1(y)) = d_1 \circ d_2(x) + d_1 \circ d_2(y) - d_2 \circ d_1(x) - d_2 \circ d_1(y) = (d_1 \circ d_2 - d_2 \circ d_1)(x) + (d_1 \circ d_2 - d_2 \circ d_1)(x)$. Allons-y pour le produit : $d_1(d_2(xy)) - d_2(d_1(xy)) = d_1(xd_2(y) + d_2(x)y) - d_2(xd_1(y) + d_1(x)y) = d_1(xd_2(y)) + d_1(d_2(x)y) - d_2(xd_1(y)) + d_2(d_1(x)y) = d_1(x)d_2(y) + xd_1 \circ d_2(y) + d_1 \circ d_2(x)y + d_2(x)d_1(y) - d_2(x)d_1(y) - xd_2 \circ d_1(y) - d_2 \circ d_1(x)y - d_1(x)d_2(y) = x((d_1 \circ d_2 - d_2 \circ d_1)(y)) + (d_1 \circ d_2 - d_2 \circ d_1(x))y$ (les autres termes se simplifient), donc ça marche !
3. En effet, $[d, d_x](y) = d(d_x(y)) - d_x(d(y)) = d(xy) - d(yx) - [x, d(y)] = d(x)y + xd(y) - d(y)x - yd(x) - xd(y) + d(y)x = d(x)y - yd(x) = [d(x), y] = d_{d(x)}(y)$.
4. En effet, $[d_x, d_y](z) = d_x(d_y(z)) - d_y(d_x(z)) = [x, [y, z]] - [y, [x, z]] = xyz - xzy - yzx + zyx - yxz + yzx + xzy - zxy = xyz + zyx - yxz - zxy = (xy - yx)z - z(xy - yx) = [[x, y], z] = d_{[x,y]}(z)$.

Problème 2 : Fractions continues.

Étude de la nature de (u_n).

1. Calculons donc $u_0 = a_0 = 1$; $u_1 = 1 + \dfrac{1}{a_1} = 1 + 1 = 2$; $u_2 = 1 + \dfrac{1}{1+\frac{1}{2}} = 1 + \dfrac{2}{3} = \dfrac{5}{3}$; $u_3 = 1 + \dfrac{1}{1 + \frac{1}{2+1}} = 1 + \dfrac{3}{4} = \dfrac{7}{4}$; et enfin $u_4 = 1 + \dfrac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1+\frac{1}{2}}}} = 1 + \dfrac{1}{1 + \frac{1}{2+\frac{2}{3}}} = 1 + \dfrac{1}{1+\frac{3}{8}} = 1 + \dfrac{8}{11} = \dfrac{19}{11}$.
2. On peut constater que, quelle que soit la parité de n, on a toujours $u_{n+2} = 1 + \dfrac{1}{1 + \frac{1}{1+u_n}} = 1 + \dfrac{1}{\frac{2+u_n}{1+u_n}} = 1 + \dfrac{1+u_n}{2+u_n} = \dfrac{2 + u_n + 1 + u_n}{2+u_n} = \dfrac{3+2u_n}{2+u_n}$.
3. La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$, de dérivée $f'(x) = \dfrac{2(2+x) - (3+2x)}{(2+x)^2} = \dfrac{1}{(2+x)^2} > 0$. La fonction f est donc strictement croissante sur $]-\infty; -2[$ et sur $]-2; +\infty[$.
4. Constatons que $f(x) = x$ si $\dfrac{3+2x}{2+x} - x = 0$, soit $\dfrac{3-x^2}{2+x} = 0$. Les deux solutions de cette équation sont $x_1 = \sqrt{3}$, et $x_2 = -\sqrt{3}$. Au vu du calcul précédent, le signe de $f(x) - x$ sera positif sur $]-\infty; -2] \cup] - \sqrt{3}; \sqrt{3}]$, et négatif sur $]-2; -\sqrt{3}[\cup]\sqrt{3}; +\infty[$.
5. Prouvons donc par récurrence que la suite u_{2n} est croissante et majorée par $\sqrt{3}$. On a calculé plus haut $u_0 = 1$ et $u_2 = \dfrac{5}{3} < \sqrt{3}$, puisque $\left(\dfrac{5}{3}\right)^2 = \dfrac{25}{9} < 3$. De plus, on a bien $u_0 < u_2$. Supposons donc $1 \leqslant u_{2n} \leqslant u_{2n+2} \leqslant \sqrt{3}$ pour un certain entier n, alors la fonction f étant croissante sur l'intervalle $[1; \sqrt{3}]$, on aura $f(1) \leqslant f(u_{2n}) \leqslant f(u_{2n+2}) \leqslant f(\sqrt{3})$, c'est-à-dire

$\frac{5}{3} \leqslant u_{2n+2} \leqslant u_{2n+4} \leqslant \sqrt{3}$, ce qui prouve l'hérédité de nos deux propriétés. Par principe de récurrence, la suite est bien croissante et majorée par $\sqrt{3}$. La démonstration est très similaire pour les termes d'indices impairs, en constatant que $\sqrt{3} \leqslant u_3 \leqslant u_1$, puis que $\sqrt{3} \leqslant u_{2n+1} \leqslant u_{2n+3}$ implique $\sqrt{3} \leqslant u_{2n+3} \leqslant u_{2n+5}$ en utilisant la croissance de f.

6. Étant respectivement croissante et majorée, et décroissante et minorée, les deux suites convergent. Notons par exemple l la limite finie de la suite (u_{2n}). On a alors certainement $\lim_{n\to+\infty} u_{2n+2} = l$. Or, au vu de la relation liant u_{2n+2} et u_{2n}, on a également $\lim_{n\to+\infty} u_{2n+2} = \frac{3+2l}{2+l}$. Autrement dit, la limite l vérifie l'équation $l = f(l)$, donc $l = \pm\sqrt{3}$. La suite étant par ailleurs minorée par son premier terme $u_0 = 1$, elle ne peut converger vers $-\sqrt{3}$, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} u_{2n} = \sqrt{3}$. Le raisonnement est le même pour u_{2n+1}. Les termes d'indices pairs et impairs de la suite (u_n) convergeant vers $\sqrt{3}$, on peut en déduire que la suite (u_n) est convergente, de limite $\sqrt{3}$.

Étude de deux suites auxiliaires.

1. C'est, pour chacune des deux suites, une récurrence double immédiate : les deux premiers termes de chaque suite sont des entiers naturels, et en supposant que p_n et p_{n+1} sont des entiers naturels, comme $a_{n+2} = 1$ ou $a_{n+2} = 2$, on aura très certainement $a_{n+2}p_{n+1} + p_n \in \mathbb{N}$, d'où l'hérédité de la proptiété. C'est évidemment la même chose pour q_{n+2}. Par principe de récurrence double, tous les termes des deux suites sont bien des entiers naturels.
2. Encore une récurrence double : $q_0 = 1 \geqslant 0$; $q_1 = 1 \geqslant 1$; et en supposant $q_n \geqslant n$ et $q_{n+1} \geqslant n+1$, comme $a_{n+2} \geqslant 1$, on aura $q_{n+2} \geqslant q_{n+1} + q_n \geqslant 2n+1 \geqslant n+2$ si $n \geqslant 1$. Pour $n = 0$, comme $a_2 = 2$, on aura tout de même $q_2 = 3 \geqslant 2$. Dans tous les cas, l'hérédité est donc vérifiée, ce qui achève la récurrence.
3. C'est, pour changer, une récurrence simple. Pour $n = 2$, $a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{x}} = 1 + \frac{x}{x+1} = \frac{2x+1}{x+1} = \frac{p_1 x + p_0}{q_1 x + q_0}$. Supposons désormais la propriété vraie au rang n pour tout réel x strictement positif. On peut alors l'appliquer au nombre réel strictement positif $a_n + \frac{1}{x}$ pour obtenir $a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n + \frac{1}{x}}}}} = \frac{(a_n + \frac{1}{x})p_{n-1} + p_{n-2}}{(a_n + \frac{1}{x})q_{n-1} + q_{n-2}} = \frac{x a_n p_{n-1} + p_{n-1} + x p_{n-2}}{x a_n q_{n-1} + q_{n-1} + x q_{n-2}}$ $= \frac{x(a_n p_{n-1} + p_{n-2}) + p_{n-1}}{x(a_n q_{n-1} + q_{n-2}) + q_{n-1}} = \frac{x p_n + p_{n-1}}{x q_n + q_{n-1}}$, ce qui prouve la formule pour x au rang n. La formule est donc vraie pour tout réel strictement positif, et pour tout entier supérieur ou égal à 2. Il suffit ensuite de l'appliquer à $x = a_n$ (qui est toujours strictement positif) pour obtenir $u_n = \frac{a_n p_{n-1} + p_{n-2}}{a_n q_{n-1} + q_{n-2}} = \frac{p_n}{q_n}$. Ceci étant vrai à partir de $n = 2$, il faut encore vérifier que $u_0 = \frac{p_0}{q_0}$ et $u_1 = \frac{p_1}{q_1}$, ce qui est vrai.
4. Encore une récurrence : $p_1 q_0 - q_1 p_0 = 2 - 1 = 1 = (-1)^0$ et, comme $p_{n+1}q_n - q_{n+1}p_n = (a_{n+1}p_n + p_{n-1})q_n - (a_{n+1}q_n + q_{n-1})p_n = p_{n-1}q_n - q_{n-1}p_n = -(p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1})$, la propriété est héréditaire. Elle est donc vraie pour tout entier.
5. Calculons donc $u_{n+1} - u_n = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{p_{n+1}q_n - q_{n+1}p_n}{q_{n+1}q_n} = \frac{(-1)^n}{q_{n+1}q_n}$, donc $|u_{n+1} - u_n| = \frac{1}{q_{n+1}q_n} \leqslant \frac{1}{n(n+1)}$ puisqu'on a vu plus haut que $q_n \geqslant n$.
6. Question supprimée.
7. En utilisant la relation de récurrence définissant p_n, on a $r_{n+2} = p_{2n+4} = a_{2n+4}p_{2n+3} + p_{2n+2} = p_{2n+3} + p_{2n+2}$ puisque $a_{2n+4} = 1$. On a donc $r_{n+2} = a_{2n+3}p_{2n+2} + p_{2n+1} + p_{2n+2} = 3p_{2n+2} + p_{2n+1}$. Or, $p_{2n+2} = p_{2n+1} + p_{2n}$, donc $p_{2n+1} = p_{2n+2} - p_{2n}$, donc $r_{n+2} = 4p_{2n+2} - p_{2n} = 4r_{n+1} - r_n$.

8. La suite (r_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2. Son équation caractéristique $x^2 - 4x + 1 = 0$ a pour discriminant $\Delta = 16 - 4 = 12$, et admet donc deux racines $r = \frac{4+2\sqrt{3}}{2} = 2+\sqrt{3}$, et $s = \frac{4-2\sqrt{3}}{2} = 2-\sqrt{3}$. On peut donc écrire $r_n = \alpha(2+\sqrt{3})^n + \beta(2-\sqrt{3})^n$, avec $r_0 = p_0 = 1 = \alpha + \beta$, et $r_1 = p_2 = 5 = \alpha(2+\sqrt{3}) + \beta(2-\sqrt{3})$. On a donc $\beta = 1-\alpha$, et $5 = (2+\sqrt{3})\alpha + 2 - \sqrt{3} - (2-\sqrt{3})\alpha$, soit $2\sqrt{3}\alpha = 3+\sqrt{3}$, et $\alpha = \frac{3+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$. Ensuite, $\beta = 1-\alpha = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$. Finalement, $p_{2n} = r_n = \frac{1+\sqrt{3}}{2}(2+\sqrt{3})^n + \frac{1-\sqrt{3}}{2}(2-\sqrt{3})^n$.
9. En posant $s_n = q_{2n}$, la suite (s_n) vérifie la même relation de récurrence linéaire que (r_n) (puisque (p_n) et (q_n) vérifient elles-mêmes la même relation de récurrence double), donc $s_n = \gamma(2+\sqrt{3})^n + \delta(2-\sqrt{3})^n$, avec $q_0 = 1 = \gamma + \delta$, et $q_2 = 3 = \gamma(2+\sqrt{3}) + \delta(2-\sqrt{3})$. Des calculs similaires à ceux de la question précédente donnent $\gamma = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$ et $\delta = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}$, soit $q_{2n} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}(2+\sqrt{3})^n + \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}(2-\sqrt{3})^n$.
10. On sait que $u_{2n} = \frac{p_{2n}}{q_{2n}}$. Or, comme $2+\sqrt{3} > 1$, et $0 < 2-\sqrt{3} < 1$, on aura $p_{2n} \sim \frac{1+\sqrt{3}}{2}(2+\sqrt{3})^n$, et $q_n \sim \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}(2+\sqrt{3})^n$. Après une jolie simplification, cela donne $u_{2n} \sim \sqrt{3}$, soit $\lim_{n\to+\infty} u_{2n} = \sqrt{3}$. Comme on sait que la suite (u_n) est convergente, sa limite est nécessairement la même que celle de (u_{2n}), d'où $\lim_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{3}$.