TD n°7 : Révisions pour le DS6

PTSI B Lycée Eiffel

8 février 2013

Problème 1 : Dérivations dans un anneau.

Dans tout ce problème, $(A, +, \times)$ est un anneau pas nécessairement commutatif ni intègre. On note comme toujours 0 et 1 les éléments neutres de A. Une application $d : A \to A$ est appelée **dérivation** sur A si, $\forall (x, y) \in A^2$, $d(x + y) = d(x) + d(y)$ et $d(x \times y) = x \times d(y) + y \times d(x)$.

Des exemples

1. Vérifier que sur l'anneau des fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, la dérivation est effectivement une dérivation. Qu'en est-il, sur l'ensemble des fonctions deux fois dérivables, de la dérivation seconde $f \mapsto f''$?
2. Soient deux éléments x et y de l'anneau A. On note $[x, y] = xy - yx$. Que vaut $[x, y]$ lorsque x et y commutent ? Vérifier que $[y, x] = -[x, y]$ et que $[x, y + z] = [x, y] + [x, z]$.
3. Démontrer l'identité de Jacobi $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$.
4. Montrer que l'application $d_x : y \mapsto [x, y] = xy - yx$ est une dérivation de l'anneau A.

Propriétés générales des dérivations.

On considère ici une dérivation d quelconque sur A.

1. Calculer $d(0)$ et $d(1)$.
2. Soit $x \in A$. Calculer $d(-x)$ et $d(x^{-1})$ (dans le cas où x est inversible) en fonction de $d(x)$.
3. Soient $(x_1, x_2, \dots x_n) \in A^n$, exprimer $d(x_1 x_2 \dots x_n)$ en fonction de $d(x_1)$, …, $d(x_n)$.
4. Soit $x \in A$, exprimer $d(x^n)$ en fonction de $d(x)$. Que devient cette formule si x et $d(x)$ commutent ?
5. Montrer que $\{x \in A \mid d(x) = 0\}$ est un sous-anneau de A, et même un sous-corps dans le cas où A est un corps.

Pour aller un peu plus loin.

On considère deux dérivations d_1 et d_2 sur un même anneau A.

1. La somme $d_1 + d_2$ est-elle toujours une dérivation ? Et la composée $d_2 \circ d_1$?
2. Montrer que $[d_1, d_2] = d_1 \circ d_2 - d_2 \circ d_1$ est une dérivation.
3. Montrer que $[d, d_x] = d_{d(x)}$ (où d_x est la dérivation définie dans la première partie du problème).
4. Montrer que $[d_x, d_y] = d_{[x,y]}$.

Problème 2 : Fractions continues.

On note dans tout ce problème (a_n) la suite définie par $a_0 = 1$, puis $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_{2n} = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{2n+1} = 1$. On définit une seconde suite (u_n) à partir de (a_n) de la façon suivante :

$$u_n = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1+\dots}}}$$

Étude de la nature de (u_n).

1. Calculer les valeurs de u_0, u_1, u_2, u_3 et u_4 (on donnera les résultats sous forme d'un quotient d'entiers).
2. Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = \dfrac{3 + 2u_n}{2 + u_n}$.
3. On définit une fonction f par $f(x) = \dfrac{3 + 2x}{2 + x}$, de sorte que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = f(u_n)$. Étudier les variations de la fonction f.
4. Résoudre l'équation $f(x) = x$ et étudier le signe de $f(x) - x$.
5. Prouver que la suite (u_{2n}) est croissante et majorée par $\sqrt{3}$; et que la suite (u_{2n+1}) est décroissante et minorée par $\sqrt{3}$.
6. Prouver que les deux suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers une même limite, et en déduire la nature de (u_n).

Étude de deux suites auxiliaires

On définit désormais deux nouvelles suites (p_n) et (q_n) en posant $p_0 = 1$, $p_1 = 2$, $q_0 = q_1 = 1$, et $\forall n \in \mathbb{N}$, $p_{n+2} = a_{n+2}p_{n+1} + p_n$ et $q_{n+2} = a_{n+2}q_{n+1} + q_n$.

1. Démontrer que tous les termes de ces deux suites sont des entiers naturels.
2. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $q_n \geqslant n$.
3. Montrer par récurrence que, $\forall x > 0$,
$\forall n \geqslant 2$, $a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{x}}}} = \dfrac{xp_{n-1} + p_{n-2}}{xq_{n-1} + q_{n-2}}$. En déduire que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{p_n}{q_n}$.
4. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $p_{n+1}q_n - q_{n+1}p_n = (-1)^n$.
5. Montrer à l'aide des résultats précédents que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|u_{n+1} - u_n| \leqslant \dfrac{1}{n(n+1)}$.
6. En considérant la série de terme général $u_{n+1} - u_n$, redémontrer la convergence de la suite (u_n).
7. On pose, $\forall n \in \mathbb{N}$, $r_n = p_{2n}$. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $r_{n+2} = 4r_{n+1} - r_n$.
8. En déduire l'expression de p_{2n} en fonction de n.
9. Déterminer de même l'expression de q_{2n} en fonction de n.
10. À l'aide des résultats précédents, retrouver la limite de la suite (u_n).