TD Algorithmique n°6

PTSI B Lycée Eiffel

11 décembre 2012

Pour ce dernier TD d'algorithmique, nous allons nous intéresser un peu à la théorie des graphes. Un graphe mathématique est constitué de points appelés sommets, reliés (ou non) par des flèches appelées arêtes, et sur lesquels on peu également indiquer un nombre correspondant au poids de l'arête. Par exemple, on peu représenter par un graphe un réseau routier : les sommets sont les différentes villes, les arêtes les routes et les poids représentent les distances. Un graphe peut être orienté (les flèches ont un sens) ou non. Le degré d'un sommet d'un graphe est le nombre de sommets voisins de ce sommet, c'est-à-dire le nombre de sommets auxquels il est relié par une arête. Pour représenter un graphe en Maple, on utilisera une matrice, c'est-à-dire un tableau de nombres entiers contenant n lignes et n colonnes, n étant le nombre de sommets du graphe. Dans la case $[i,j]$ du tableau, on indiquera le poids de l'arête reliant le sommet i au sommet j (ou 0 s'il n'y a pas de poids ; si le graphe n'est pas pondéré, les poids seront tous égaux à 1). Dans le cas d'un graphe non orienté, la matrice sera symétrique, la case $[i,j]$ contenant la même valeur que la case $[j,i]$.

- Écrire une procédure Maple qui détermine le degré du sommet numéro i (la valeur de i étant choisie par l'utilisateur) d'un graphe.
- Compléter le programme précédent pour qu'il affiche la liste des sommets voisins du sommet i.
- Deux sommets sont jumeaux s'ils ont les mêmes voisins. Écrire une procédure qui détermine si deux sommets i et j sont jumeaux.
- Un graphe est complet si tous les sommets du graphe sont reliés entre eux par des arêtes. Écrire une procédure qui détermine si un graphe est complet.
- Écrire une procédure déterminant l'arête de poids maximal (et le poids correspondant) dans un graphe pondéré.

Un chemin menant du sommet i au sommet j est une succession d'arêtes démarrant au sommet i et terminant au sommet j. Un chemin est eulérien s'il passe exactement une fois par chaque arête du graphe. Un chemin de longueur minimale de i vers j est un chemin le plus court possible menant de i à j (ou de poids total le plus faible dans le cas d'un graphe pondéré).

- On admet qu'un graphe est eulérien si chacun de ses sommets est de degré pair (non nul). Écrire une procédure Maple qui déterminer si notre graphe est eulérien.
- L'algorithme de Bellmann détermine les distances minimales d'un sommet donné à chacun des autres sommets du graphe de la façon suivante : au départ toutes les distances sont infinies (ou égales à n fois le poids maximal), et on répète n fois l'opération consistant à remplacer la distance de i à j par la plus patite valeur parmi les $d(i,k) + d(k,j)$, où parcourt tous les voisins de j. Écrire un programme Maple faisant tourner cette procédure (on pourra la tester à la main sur un graphe pas trop gros avant).
- L'algorithme de Dijkstra calcule la distance minimale entre les sommets i et j de la façon suivante : au départ, on affecte au sommet i la distance 0 et aux autres une distance infinie, on constitue un tableau ne contenant que la valeur i. À chaque étape, on remplace la distance de tous les sommets voisins du dernier ajouté dans le tebleau (notons-le k) par $d(i,k)+d(k,j)$ (si ça n'augmente pas la distance, naturellement). On ajoute alors au tableau le sommet de distance la plus petite parmi ceux qui ne sont pas encore dans le tableau. On s'arrête au moment où on ajoute le sommet j au tableau. Écrire un programme Maple effectuant cet algorithme (qu'on pourra à nouveau tester sur un exemple pas trop lourd à la main).
- Améliorer le programme pour qu'il affiche les sommets par lesquels passe le plus court chemin.