TD n°6 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

14 décembre 2012

Exercice 1 (tiré du sujet B Banque PT 2012)

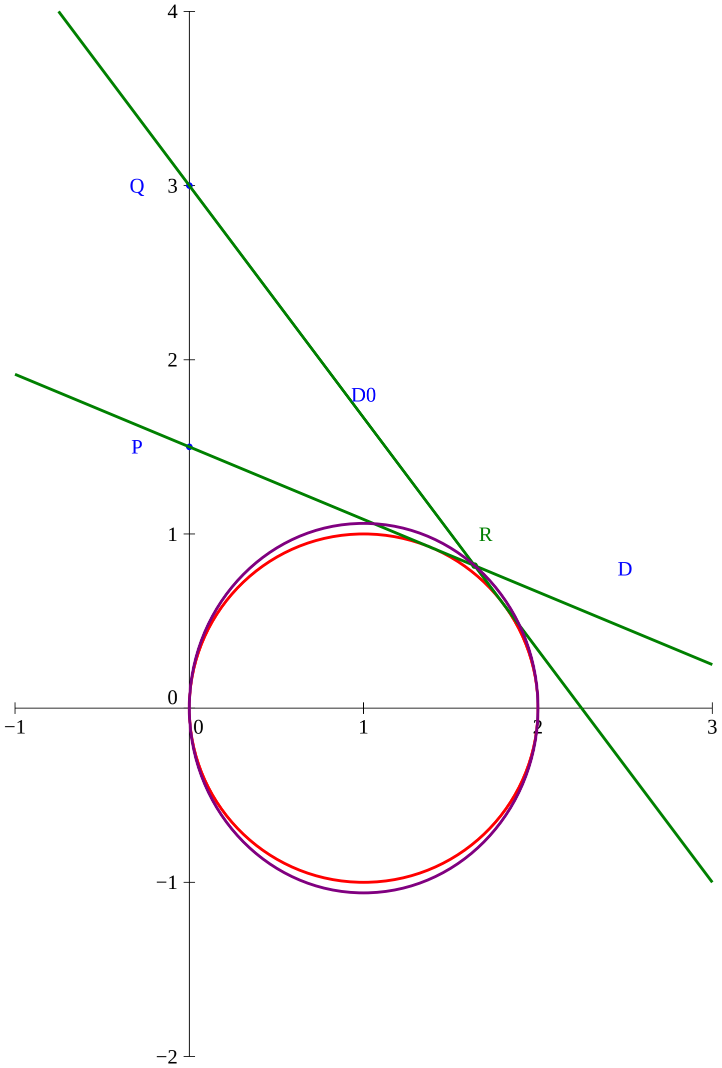
1. (a) La conique a dans ce cas pour équation $x^2 + y^2 - 2x = 0$, soit $(x-1)^2 + y^2 = 1$. On reconnait un cercle de centre $A(1,0)$ et de rayon 1.

   (b) Les tangentes au cercle ont une équation de la forme $(x-1)(x_M - 1) + yy_M = 1$, où M désigne un point du cercle. Une telle tangente passe par le point $P(0, \alpha)$ si $1 - x_M + \alpha y_M = 1$, soit $x_M = \alpha y_M$. Comme le point doit de plus appartenir au cercle, il vérifie $(x_M - 1)^2 + y_M^2 = 1$, soit $x_M^2 - 2x_M + 1 + \dfrac{x_M^2}{\alpha^2} = 1$, donc $x_M^2 \left(1 + \dfrac{1}{\alpha^2}\right) - 2x_M = 0$. On obtient deux valeurs possibles pour x_M : soit $x_M = 0$, et alors $y_M = 0$ et la tangente a simplement pour équation $1 - x = 1$, soit $x = 0$, il s'agit de l'axe des ordonnées (c'est la tangente verticale évoquée par l'énoncé) ; soit $x_M = \dfrac{2\alpha^2}{1+\alpha^2}$, et $y_M = \dfrac{2\alpha}{1+\alpha^2}$. La tangente a alors pour équation (en multipliant tout par $1 + \alpha^2$) $(x-1)(2\alpha^2 - 1 - \alpha^2) + 2y\alpha = 1 + \alpha^2$, soit $2\alpha y + (\alpha^2 - 1)x = 2\alpha^2$. Finalement, on peut mettre l'équation sous la forme $y = \alpha + \dfrac{1-\alpha^2}{2\alpha}x$.

   (c) On peut procéder de la même façon : une tangente passe par le point Q si $1 - x_M + 2\alpha y_M = 1$, soit $x_M = 2\alpha y_M$. En intégrant cette condition à l'équation de cercle, $x_M^2 - 2x_M + 1 + \dfrac{x_M^2}{4\alpha^2} = 1$, soit $x_M \left(1 + \dfrac{1}{4\alpha^2}\right) - 2x_M = 0$. On retrouve la possibilité x_M qui donne l'axe des ordonnées comme tangente verticale, et la seconde possibilité $x_M = \dfrac{8\alpha^2}{4\alpha^2+1}$. On a alors $y_M = \dfrac{4\alpha}{4\alpha^2+1}$. La tangente D_0 a donc pour équation $(x-1)(8\alpha^2 - 4\alpha^2 - 1) + 4\alpha y = 1 + 4\alpha^2$, soit $4\alpha y + (4\alpha^2 - 1)x = 8\alpha^2$, ou encore l'équation finale $y = 2\alpha + \dfrac{1-4\alpha^2}{4\alpha}$.

   (d) En reprenant les deux équations obtenues pour D et D_0, on obtient la condition $\alpha + \dfrac{1-\alpha^2}{2\alpha}x = 2\alpha + \dfrac{1-4\alpha^2}{4\alpha}x$, soit $x \times \dfrac{2 - 2\alpha^2 - 1 + 4\alpha^2}{4\alpha} = \alpha$, donc $x = \dfrac{4\alpha^2}{1+2\alpha^2}$. On trouve alors $y = \alpha + \dfrac{(1-\alpha^2)2\alpha}{1+2\alpha^2} = \dfrac{3\alpha}{1+2\alpha^2}$.

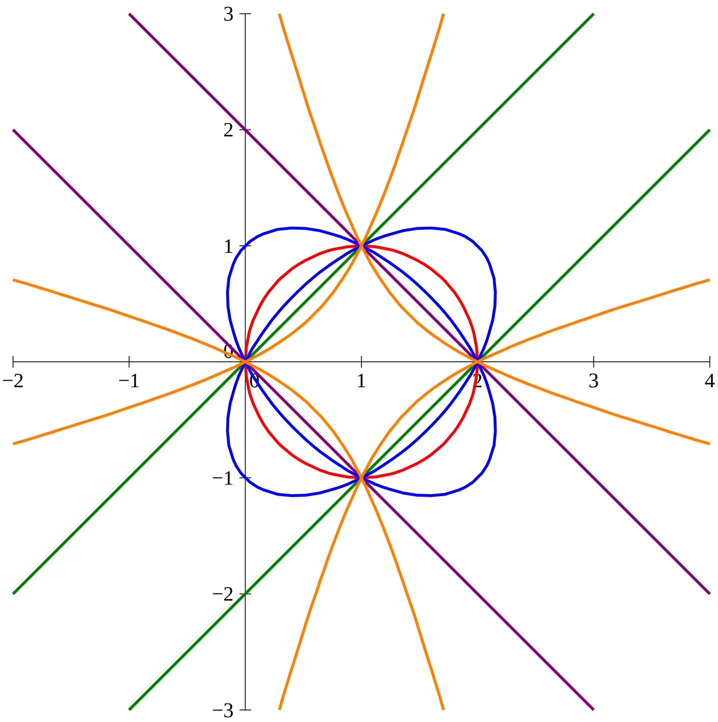
   (e) Un schéma où on tracer plusieurs points R permet de tenter de se convaincre que ces points se situent sur une ellipse de même centre que le cercle, c'est-à-dire $A(1,0)$. Vérifions-le : $(x_R - 1)^2 = \dfrac{(2\alpha^2-1)^2}{(1+2\alpha)^2} = \dfrac{4\alpha^4 - 4\alpha^2 + 1}{(1+2\alpha^2)^2}$, et $y_R^2 = \dfrac{9\alpha^2}{(1+2\alpha^2)^2}$, on cherche deux réels a et b tels que $a(x-1)^2 + by^2 = 1$, ce qui donne la condition $a(4\alpha^4 - 4\alpha^2 + 1) + 9b\alpha^2 = 1 + 4\alpha^2 + 4\alpha^4$. Par identification, on trouve $4a = 4$, $-4a + 9b = 4$ et $a = 1$, soit $a = 1$ et $b = \dfrac{8}{9}$. L'ensemble $\mathcal{P}$ a donc pour équation $(x-1)^2 + \dfrac{8}{9}y^2 = 1$, c'est une ellipse centrée en A, de demi-grand axe $\dfrac{3}{2\sqrt{2}}$ et de demi-petit axe 1. Attention, son axe focal est vertical. Une figure (pas demandée par l'énoncé) pour illustrer ceci (le cercle en rouge, l'ellipse finale en violet, un exemple de point R obtenu pour $\alpha = \frac{3}{2}$ en vert) :



2. La courbe du second degré étudiée a pour discriminant $\delta = 1 - \frac{4p^2}{4} = 1 - p^2$. On est donc en présence d'une courbe de type parabole quand $p = 1$ ou $p = -1$, d'une courbe de type ellipse quand $p \in]-1;1[$, et d'une courbe de type hyperbole quand $|p| > 1$. Pour être plus précis, commençons la réduction en éliminant les termes en x et en y : si on pose $X = x - a$ et $Y = y - b$, on obtient $x^2 - 2x + y^2 + 2py - 2pxy = (X+a)^2 - 2(X+a) + (Y+b)^2 + 2p(Y+b) - 2p(X+a)(Y+b) = X^2 + 2aX + a^2 - 2X - 2a + Y^2 + 2bY + b^2 + 2pY + 2pb - 2pXY - 2apY - 2bpX - 2pab = X^2 + Y^2 - 2pXY + (2a - 2 - 2bp)X + (2b + 2p - 2ap)Y + a^2 - 2a + b^2 + 2pb - 2pab$. Il faut donc choisir a et b tels que $a = bp + 1$ et $b + p = ap$, soit $a = ap^2 - p^2 + 1$, donc $a = 1$, et $b = 0$. L'équation se réduit alors fort simplement à $X^2 + Y^2 - 2pXY = 1$.

   On effectue alors une rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$, ce qui revient à poser $X = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y')$ et $Y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y')$. L'équation devient alors $\frac{1}{2}(x' - y')^2 + \frac{1}{2}(x' + y')^2 - p(x' - y')(x' + y') = 1$, soit $(1 - p)x'^2 + (1 + p)y'^2 = 1$. Si $p = 1$, on est ramené au cas très particulier $2y'^2 = 1$, ce qui donne deux droites parallèles. De même si $p = -1$, on a deux droites parallèles. Si $p \in]-1;1[$, les deux nombres $1 + p$ et $1 - p$ sont strictement positifs, et on reconnait une équation résuite d'ellipse. De même, si $|p| > 1$, on reconnait une équation réduite d'hyperbole (l'un des deux facteurs étant alors négatif, l'axe de l'hyperbole change selon que $p > 1$ ou $p < -1$).

3. Comme la rotation effectuée est toujours d'angle $\frac{\pi}{4}$, les axes sont toujours dans les directions des deux bissectrices des axes du repère initial, et donc dirigées respectivement par le vecteur $\overrightarrow{u}(1,1)$ et le vecteur $\overrightarrow{v}(-1,1)$. Au vu des valeurs obtenues obtenues pour a et b dans la première partie du calcul, le centre ω est toujours situé en $A(1,0)$. Pour finir en beauté, un tracé de quelques-unes des courbes : en rouge le cercle obtenu pour $p=0$, en vert les deux droites pour $p=1$, en violet les deux droites pour $p=-1$, en bleu les deux ellipses obtenues pour $p=\pm\frac{1}{2}$, et en orange les deux hyperboles pour $p=\pm 2$:



Exercice 2 (tiré du sujet B banque PT 2011)

Le plan euclidien est rapporté au repère orthonormé direct $(O,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$. On donne les points $F(1,0)$ et $A(1,-2)$. Soit $\mathcal{P}$ la parabole passant par A, de foyer F et de sommet O. Tout point de $\mathcal{P}$ est repéré par son ordonnée $2t$, où t désigne un paramètre réel.

1. Si la parabole a pour sommet O et foyer F qui est situé sur l'axe des abscisses, on est dans la situation de l'équation réduite, avec ici $p=2x_F=2$. Son équation est donc $y^2=4x$, et on constate que cette parabole passe bien par le point A puisque $y_A^2=(-2)^2=4=4x_A$.
2. Le point d'ordonnée $2t$ vérifie donc $4x_M=(2t)^2=4t^2$, soit $x_M=t^2$. L'équation de la tangente en M est donc $yy_M=p(x+x_M)$, c'est-à-dire $2ty=2(x+t^2)$, ou encore $2t^2-2ty+2x=0$, ou plus simplement $ty-x-t^2=0$. En particulier, cette tangente a pour vecteur normal $(1,-t)$. Toute perpendiculaire à cette tangente a donc pour vecteur directeur $(1,-t)$ et une équation de la forme $tx+y+c=0$. Pour qu'elle passe par le point A, on doit avoir $t-2+c=0$, soit $c=2-t$. L'équation de la perpendiculaire est donc $tx+y+2-t=0$. Pour déterminer les coordonnées du point d'intersection, il faut résoudre le système $\left\{\begin{array}{ccccc} -x & + & ty & = & t^2 \\ tx & + & y & = & t-2 \end{array}\right.$. En multipliant la première équation par t et en l'ajoutant à la seconde, on trouve $(t^2+1)y=t^3+t-2$, soit $y=\frac{t^3+t-2}{t^2+1}$. On en déduit $x=ty-t^2=\frac{t^4+t^2-2t-t^4-t^2}{t^2+1}=-\frac{2t}{t^2+1}$. Le point N a donc pour coordonnées $\left(-\frac{2t}{t^2+1};\frac{t^3+t-2}{t^2+1}\right)$.

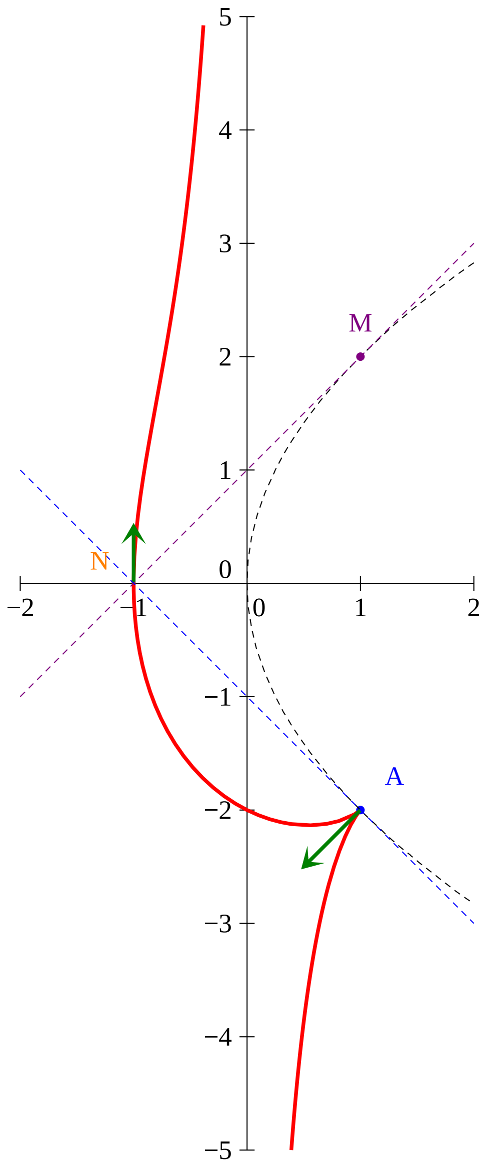
3. Il s'agit en fait d'étudier la courbe paramétrée définie par $\left\{\begin{array}{rcl} x(t) & = & -\dfrac{2t}{t^2+1} \\ y(t) & = & \dfrac{t^3+t-2}{t^2+1} \end{array}\right.$. Le dénominateur ne s'annulant jamais, la courbe est définie sur $\mathbb{R}$. Les deux fonctions coordonnées sont dérivables sur $\mathbb{R}$, de dérivées $x'(t) = \dfrac{-2(t^2+1)+2t\times 2t}{(t^2+1)^2} = \dfrac{2t^2-2}{(t^2+1)^2}$, et $y'(t) = \dfrac{(3t^2+1)(t^2+1)-2t(t^3+t-2)}{(t^2+1)^2} = \dfrac{t^4+2t^2+4t+1}{(t^2+1)^2}$. La dérivée x' s'annule en 1 et en -1, elle est négative entre les racines. On calcule de plus aisément $x(1) = -1$; $y(1) = 0$; $x(-1) = 1$ et $y(-1) = -2$. Pour y', c'est plus compliqué, le numérateur de degré 4 a pour racine évidente -1, on peut le factoriser sous la forme $(t+1)(at^3+bt^2+ct+d) = at^4+(a+b)t^3+(b+c)t^2+(c+d)t+d$. Par identification, on trouve $a = 1$, $b = -1$, $c = 3$ et $d = 1$. reste à déterminer le signe de $g(t) = t^3-t^2+3t+1$, qui n'a pas le bon gout d'avoir une racine évidente. Dérivons : $g'(t) = 3t^2-2t+3$ a pour discriminant $\Delta = 4-36 < 0$, donc cette dérivée est strictement positive sur $\mathbb{R}$. La fonction g est donc strictement croissante et s'annule nécessairement une unique fois sur $\mathbb{R}$, en une valeur que l'on notera γ. Comme $g(0) = 1$ et $g(-1) = -2$, le théorème des valeurs intermédiaires permet d'affirmer que $\gamma \in]-1;0[$ (une dichotomie plus poussée permet d'obtenir, à l'aide de la calculatrice, $\gamma \simeq -0.3$. On ne pourra évidemment pas donner de valeurs précises pour $x(\gamma)$ et $y(\gamma)$, on se contentera de placer le point de façon cohérente avec le tableau de variations. Les limites en $\pm\infty$ s'obtiennent de manière immédiate à l'aide de la règle du quotient des termes de plus haut degré, pour donner le tableau de variations suivant :

t	$-\infty$		-1		γ		1		$+\infty$
$x'(t)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$x(t)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$x(\gamma)$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0
$y'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$y(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$y(\gamma)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Les branches infinies seront vite étudiées puisqu'on a de chaque côté l'axe des ordonnées comme asymptote oblique. Quant au point A, il correspond au point stationnaire de l'arc, pour $t = -1$. Calculons les dérivées secondes : $x''(t) = \dfrac{4t(t^2+1)^2-4t(t^2+1)(2t^2-2)}{(t^2+1)^4} = \dfrac{4t^3+4t-8t^3+8t}{(t^2+1)^3} = \dfrac{-4t^3+12t}{(t^2+1)^3}$ donc $x''(-1) = -1$;

et $y''(t) = \dfrac{(4t^3+4t+4)(t^2+1)^2-4t(t^2+1)(t^4+2t^2+4t+1)}{(t^2+1)^4}$

$= \dfrac{4(t^3+t+1)(t^2+1)-4t(t^4+2t^2+4t+1)}{(t^2+1)^3} = \dfrac{-12t^2+4}{(t^2+1)^3}$. Notons qu'on n'a pas vraiment besoin de développer pour calculer $y''(-1) = -1$. La tangente au point A est donc dirigée par le vecteur $(-1,-1)$. Voici une allure de la courbe, avec en pointillés la parabole initiale, et la construction du point N pour un des points de la parabole :



4. Attention, les calculs vont commencer à être très moches. Pour que les trois points soient alignés, si on les note N_1, N_2 et N_3 les trois points correspondants, on doit avoir $\det(\overrightarrow{N_1N_2}, \overrightarrow{N_1N_3}) = 0$. Notons $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{N_1N_2}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{N_1N_3}$. On calcule alors $x_{\overrightarrow{u}} = \dfrac{-2t_2}{t_2^2+1} + \dfrac{2t_1}{t_1^2+1} = \dfrac{n}{(t_1^2+1)(t_2^2+1)}$, avec $n = 2t_1(t_2^2+1) - 2t_2(t_1^2+1) = 2(t_1t_2^2 + t_1 - t_2t_1^2 - t_2) = 2(t_2-t_1)(t_1t_2-1)$. De même, on calcule $y_{\overrightarrow{u}} = \dfrac{n'}{(t_1^2+1)(t_2^2+1)}$, avec $n' = (t_2^3+t_2-2)(t_1^2+1) - (t_1^3+t_1-2)(t_2^2+1) = t_2^3t_1^2 - t_1^3t_2^2 + t_2^3 - t_1^3 + t_2t_1^2 - t_1t_2^2 + 2t_2^2 - 2t_1^2 + t_2 - t_1 = (t_2-t_1)(t_1^2t_2^2+t_1^2+t_1t_2+t_2^2-t_1t_2+2t_1+2t_2+1) = (t_2-t_1)(t_1^2t_2^2+t_1^2+t_2^2+2t_1+2t_2+1)$. On aurait évidemment des formules similaires pour le vecteur $\overrightarrow{v}$ en remplaçant tous les t_2 par des t_3. Comme on a un facteur $\dfrac{t_2-t_1}{(t_1^2+1)(t_2^2+1)}$ sur chacune des deux coordonnées de $\overrightarrow{u}$, ce terme se mettra en facteur du déterminant et peut être oublié (il ne s'annule que si $t_1 = t_2$, cas trivial sans intérêt).
Le déterminant est donc nul si $(2t_1t_2-2)(t_1^2t_3^2+t_1^2+t_3^2+2t_1+2t_3+1) - (2t_1t_3-2)(t_1^2t_2^2+t_1^2+t_2^2+2t_1+2t_2+1) = 0$, soit (on peut enlever les facteurs 2) $t_1^3t_2t_3^2 + t_1^3t_2 + t_1t_2t_3^2 + 2t_1^2t_2 + 2t_1t_2t_3 + t_1t_2 - t_1^2t_3^2 - t_1^2 - t_3^2 - 2t_1 - 2t_3 - 1 - t_1^3t_2^2t_3 - t_1^3t_3 - t_1t_2^2t_3 - 2t_1^2t_3 - 2t_1t_2t_3 - t_1t_3 + t_1^2t_2^2 + t_1^2 + t_2^2 + 2t_1 + 2t_2 + 1 = 0$. Beurk, après dégraissage et regroupement de termes similaires, il reste $t_1^3t_2t_3^2 - t_1^3t_2^2t_3 + t_1^3t_2 - t_1^3t_3 + t_1t_2t_3^2 - t_1t_2^2t_3 + 2t_1^2t_2 - 2t_1^2t_3 + t_1t_2 - t_1t_3 + t_1^2t_2^2 - t_1^2t_3^2 +$

$t_2^2 - t_3^2 + 2t_2 - 2t_3 = 0$. On peut tout factoriser par $t_3 - t_2$ qui peut être supposé non nul pour trouver $t_1^3 t_2 t_3 - t_1^3 + t_1 t_2 t_3 - 2t_1^2 - t_1 - t_1^2 t_2 - t_1^2 t_3 - t_2 - t_3 - 2 = 0$. Cette magnifique expression peut encore se factoriser par $t_1^2 + 1$ (mais si, regardez bien !), qui ne s'annule jamais, donc il reste la condition presque simple $t_1 t_2 t_3 - t_1 - 2 - t_2 - t_3 = 0$. On trouve bien la condition affirmée par l'énoncé avec $\alpha = 2$. Ouf.

5. Les calculs ne vont pas vraiment s'arranger dans cette question. Vu les dérivées calculées plus haut, la tangente en N_0 a une équation de la forme $(t_0^4 + 2t_0^2 + 4t_0 + 1)(x - x(t_0)) + (2 - 2t_0^2)(y - y(t_0)) = 0$. En multipliant tout par $t_0^2 + 1$, la constante (mutlipliée par $t_0^2 + 1$ donc puisqu'il y a un facteur deux facteurs $t_0^1 + 2$ quand on fait les produits alors qu'on en veut un seul) vaut $(t_0^4 + 2t_0^2 + 4t_0 + 1) \times 2t_0 + (2t_0^2 - 2) \times (t_0^3 + t_0 - 2) = 2t_0^5 + 4t_0^3 + 8t_0^2 + 2t_0 + 2t_0^5 + 2t_0^3 - 4t_0^2 - 2t_0^3 - 2t_0 + 4 = 4(t_0^5 + t_0^3 + t_0^2 + 1) = (t_0^2 + 1)(4t_0^3 + 4)$. Le point de paramètre θ appartient donc à cette tangente si, en multipliant tout par $\theta^2 + 1$, $-2\theta(t_0^4 + 2t_0^2 + 4t_0 + 1) + (2 - 2t_0^2)(\theta^3 + \theta - 2) + (4t_0^3 + 4)(1 + \theta^2) = 0$. En divisant tout par 2 et en développant pour regrouper suivant les puissances de θ, on trouve l'équation du troisième degré $(1 - t_0^2)\theta^3 + (2t_0^3 + 2)\theta^2 + (-t_0^4 - 3t_0^2 - 4t_0)\theta + 2t_0^3 + 2t_0^2 = 0$. Le réel t_0 doit logiquement être racine de ce polynôme puisque par définition la tangente coupe la courbe en son point de paramètre t_0. On peut donc factoriser sous la forme $(\theta - t_0)(a\theta^2 + b\theta + c) = a\theta^3 + (b - at_0)\theta^2 + (c - bt_0)\theta - ct_0$. Par identification, on trouve $a = 1 - t_0^2$; $b = at_0 + 2t_0^3 + 2 = t_0^3 + t_0 + 2$ et $c = bt_0 - t_0^4 - 3t_0^2 - 4t_0 = -2t_0^2 - 2t_0$. Reste à déterminer les racines du tribome $(1 - t_0^2)\theta^2 + (t_0^3 + t_0 + 2)\theta - 2t_0^2 - 2t_0$. En fait, t_0 est à nouveau racine de ce trinome (la tangente coupe « deux fois » la courbe au même endroit, ce qui est cohérent si on veut obtenir une seule solution θ distincte de t_0), vérifions-le : $(1 - t_0^2)t_0^2 + (t_0^3 + t_0 + 2)t_0 - 2t_0^2 - 2t_0 = t_0^2 - t_0^4 + t_0^4 + t_0^2 + 2t_0 - 2t_0^2 - 2t_0 = 0$. Intuile de factoriser, on peut utiliser le fait que le produit des racines vaut $\dfrac{-2t_0^2 - 2t_0}{1 - t_0^2}$ pour en déduire que la dernière racine est égale à $\dfrac{-2t_0^2 - 2t_0}{t_0(1 - t_0^2)} = \dfrac{-2(t_0 + 1)}{(1 + t_0)(1 - t_0)} = \dfrac{2}{t_0 - 1}$. Tout ça pour obtenir simplement $\theta = \dfrac{2}{t_0 - 1}$? Mais oui. Bonne chance pour trouver une méthode plus efficace.

6. On a vu plus haut que trois points étaient alignés si $t_1 t_2 t_3 - t_1 - t_2 - t_3 = 2$. Calculons alors la valeur correspondante pour les tangentiels, c'est-à-dire $\theta_1\theta_2\theta_3 - \theta_1 - \theta_2 - \theta_3 = \dfrac{8}{(t_1 - 1)(t_2 - 1)(t_3 - 1)} - \dfrac{2}{t_1 - 1} - \dfrac{2}{t_2 - 1} - \dfrac{2}{t_3 - 1}$. En mettant tout brutalement au même dénominateur, on tombe sur
$$\frac{8 - 2(t_2t_3 - t_2 - t_3 + 1) - 2(t_1t_3 - t_1 - t_3 + 1) - 2(t_1t_2 - t_1 - t_2 + 1)}{t_1t_2t_3 - t_1t_3 - t_2t_3 - t_1t_2 + t_1 + t_2 + t_3 - 1}$$
$$= \frac{2(1 - t_1t_2 - t_1t_3 - t_2t_3 + 2t_1 + 2t_2 + 2t_3)}{t_1 + t_2 + t_3 + 2 - t_1t_3 - t_2t_3 - t_1t_2 + t_1 + t_2 + t_3 - 1}$$
$= \dfrac{2(1 - t_1t_2 - t_1t_3 - t_2t_3 + 2t_1 + 2t_2 + 2t_3)}{1 - t_1t_2 - t_1t_3 - t_2t_3 + 2t_1 + 2t_2 + 2t_3} = 2$. Les trois tangentiels vérifient la condition, ils sont donc alignés.

7. Il n'y en a pas ! La tangente en $t = 1$, qui est verticale, ne recoupe pas la courbe. d'ailleurs, la formule obtenue pose un gros problème pour $t = 1$. En fait, quand $t = 1$, le polynome du troisième degré obtenu plus haut est égal à $4\theta^2 - 8\theta + 4 = 4(\theta - 1)^2$ (le terme en θ^3 disparait), il n'a donc que 1 comme racine double. Je suis sûr qu'après avoir achevé ce TD, vous êtes extrêmement impatients d'aller passer les concours l'an prochain ! Ne vous inquiétez pas trop quand même, toutes les épreuves ne sont pas aussi calculatoires.