TD n°6 : Révisions pour le DS4

PTSI B Lycée Eiffel

14 décembre 2012

Exercice 1 (tiré du sujet B Banque PT 2012)

Dans le plan euclidien rapporté au repère orthonormé direct $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j})$, on considère la conique $\mathcal{E}_p$ d'équation $x^2 + y^2 - 2pxy + 2(py - x) = 0$, où p désigne un réel. On désigne par P le point de coordonnées $(0; \alpha)$ avec α réel non nul et par Q le point de coordonnées $(0; 2\alpha)$.

1. Dans cette question, on suppose $p = 0$.
   (a) Préciser alors la nature et les éléments caractéristiques de $\mathcal{E}_0$.
   (b) Former les équations des tangentes à $\mathcal{E}_0$ menées par P. On désigne par (D) la tangente non verticale.
   (c) Former les équations des tangentes à $\mathcal{E}_0$ menées par Q. On désigne par (D_0) la tangente non verticale.
   (d) Déterminer les coordonnées du point R, intersection des droites (D) et (D_0).
   (e) On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des points R lorsque α décrit $\mathbb{R}$. Déterminer la nature de $\mathcal{P}$.
2. Déterminer, suivant les valeurs du réel p, la nature de $\mathcal{E}_p$.
3. Donner les vecteurs directeurs des axes ainsi que le centre ω_p, lorsqu'il existe, de $\mathcal{E}_p$.

Exercice 2 (tiré du sujet B banque PT 2011)

Le plan euclidien est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$. On donne les points $F(1, 0)$ et $A(1, -2)$. Soit $\mathcal{P}$ la parabole passant par A, de foyer F et de sommet O. Tout point de $\mathcal{P}$ est repéré par son ordonnée $2t$, où t désigne un paramètre réel.

1. Former une équation cartésienne de $\mathcal{P}$.
2. Soit M le point de $\mathcal{P}$, d'ordonnée $2t$, former une équation de la tangente en M à $\mathcal{P}$. Donner une équation de la perpendiculaire à cette tangente passant par A. Déterminer les coordonnées du point d'intersection N de ces deux droites.
3. Étudier et tracer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points N, lorsque M décrit $\mathcal{P}$, c'est-à-dire lorsque t décrit $\mathbb{R}$. On dressera le tableau de variations des coordonnées de N, on précisera les branches infiniesainsi que le vecteur directeur de la tangente à $\mathcal{E}$ au point A.
4. On considère trois points de $\mathcal{E}$ correspondant aux valeurs t_1, t_2 et t_3 du paramètre. Montrer que ces trois points sont alignés si et seulement si $t_1 t_2 t_3 - (t_1 + t_2 + t_3) = \alpha$, où α est un réel dont on donnera la valeur.
5. Soit N_0 le point de $\mathcal{E}$ correspondant à une valeur t_0 du paramètre t ; la tangente à $\mathcal{E}$ en N_0 recoupe $\mathcal{E}$ au point K, correspondant à une valeur θ du paramètre t. Exprimer θ en fonction de t_0.
6. Le point K est appelé tangentiel du point N_0. Montrer que si trois points de $\mathcal{E}$ sont alignés, alors leurs tangentiels sont également alignés.
7. Quel est le tangentiel du point correspondant à $t = 1$?