TD n°5 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

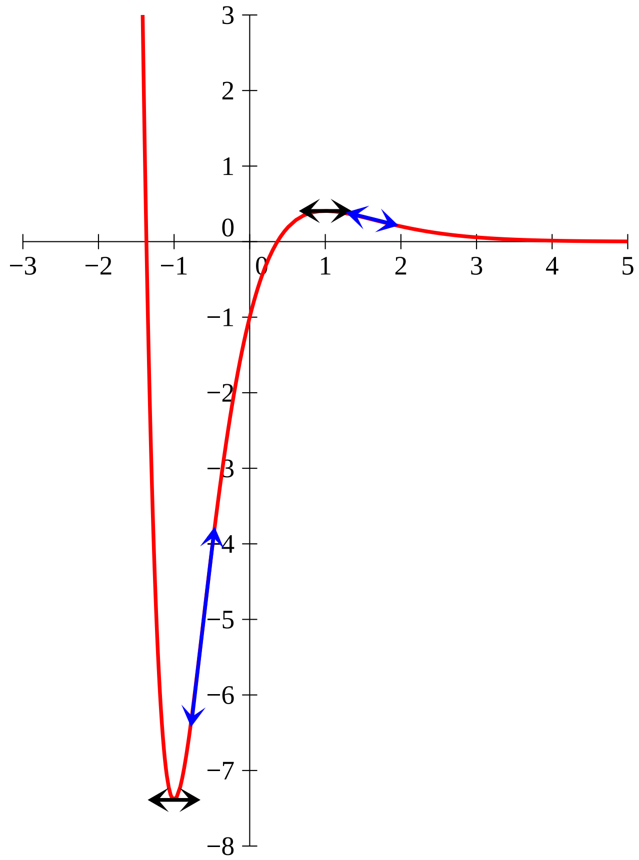
23 novembre 2012

Exercice 1

La fonction f est évidemment définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions usuelles. Par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, et sans croissance comparée, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$. On calcule sans difficulté $f'(x) = (4x + 2 - 2(2x^2 + 2x - 1))e^{-2x} = (-4x^2 + 4)e^{-2x} = -4(x^2 - 1)e^{-2x}$; puis $f''(x) = -8xe^{-2x} + (8x^2 - 8)e^{-2x} = 8(x^2 - x - 1)e^{-2x}$. La fonction f est donc décroissante sur $]-\infty; -1]$ et sur $[1; +\infty[$, et croissante sur $[-1; 1]$, admettant en -1 un minimum de valeur $f(-1) = -e^2$ et en 1 un maximum de valeur $f(1) = \dfrac{3}{e^2}$. Pour la convexité, il faut résoudre l'équation $x^2 - x - 1 = 0$, qui admet pour discriminant $\Delta = 1 + 4 = 5$, et admet pour racines $x_1 = \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$. La fonction f est convexe sur $] - \infty, x_1]$ et sur $[x_2, +\infty[$, et concave sur $[x_1, x_2]$. Puisque $x_1^2 = x_1 + 1$, on peut écrire $f(x_1) = (4x_1 + 1)e^{-2x_1} = (3 - 2\sqrt{5})e^{\sqrt{5}-1} \simeq -5.1$; de même, $f(x_2) = (4x_2 + 1)e^{-2x_2} = (3 + 2\sqrt{5})e^{-1-\sqrt{5}} \simeq 0.3$. De même, on calcule $f'(x_1) = -4x_1e^{-2x_1} = (2\sqrt{5} - 2)e^{\sqrt{5}-1} \simeq 8.5$ et $f'(x_2) = -4x_2e^{-2x_2} = (-2 - 2\sqrt{5})e^{-1-\sqrt{5}} \simeq -0.25$. On peut regrouper tous ces résultats dans le tableau de variations suivant, en constatant que $x_1 > -1$ et $x_2 > 1$:

x	$-\infty$		-1		x_1		1		x_2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$-4x_1e^{-2x_1}$	$+$	0	$-$	$-4x_2e^{-2x_2}$	$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$-e^2$	$\nearrow$	$(4x_1+1)e^{-2x_1}$	$\nearrow$	$\dfrac{3}{e^2}$	$\searrow$	$(4x_2+1)e^{-2x_2}$	$\searrow$	0
$f''(x)$			$+$		0		$-$		0	$+$	
f			convexe				concave			convexe	

Et bien sûr la superbe courbe qui va avec :

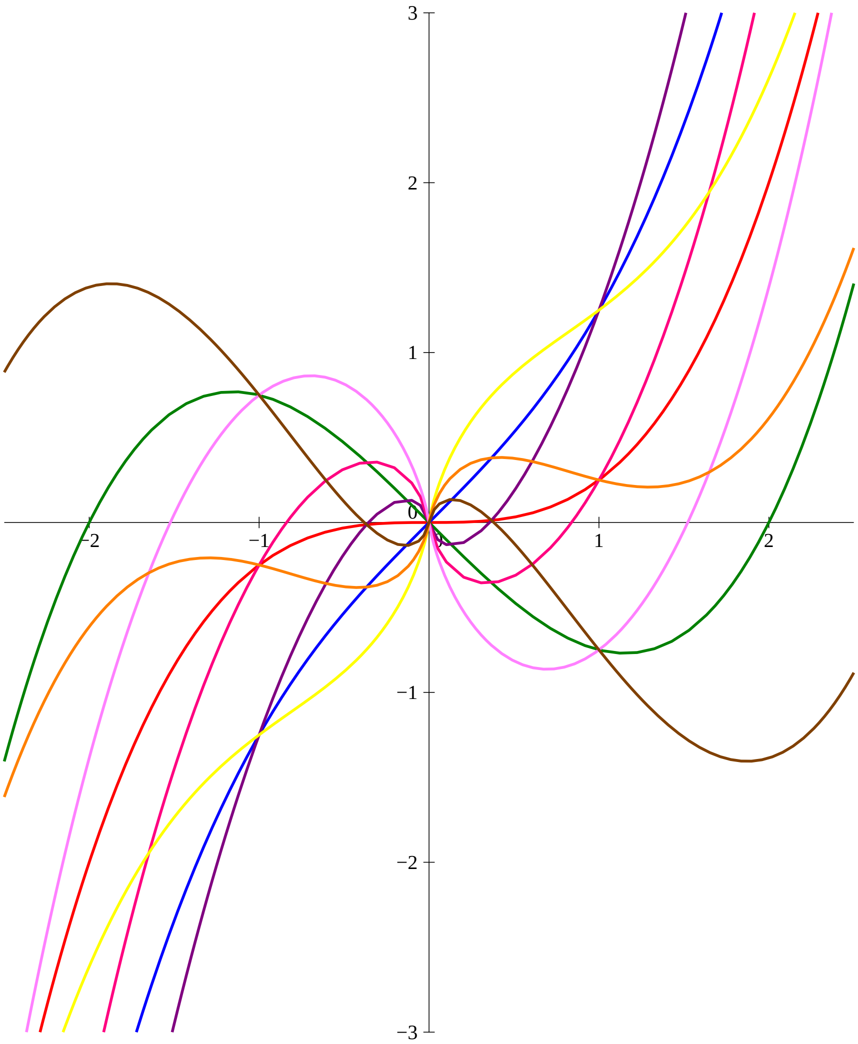


Exercice 2

1. En dérivant simplement, on constate que $z' = y' + xy'' - y' = xy''$, donc $x^2y'' = xz'$, et l'équation initiale peut se mettre sous la forme $xz' - z = x^3$.
2. L'équation homogène associée $z' - \dfrac{z}{x} = 0$ a pour solutions sur $\mathbb{R}^{+*}$ les fonctions $z_h(x) = K_1e^{\ln(x)} = K_1x$; et sur $\mathbb{R}^{-*}$ les fonctions $z_h(x) = K_2e^{\ln(-x)} = K_3x$ en posant $K_3 = -K_2$. On cherche une solution particulière (sur $\mathbb{R}$) de la forme $z_p(x) = xK(x)$ (variation de la constante), elle vérifie alors $z_p'(x) = K(x) + xK'(x)$, donc $xz_p' - z_p = x^3$ si $xK(x) + x^2K'(x) - xK(x) = x^3$, soit $K'(x) = x$. On peut choisir $K(x) = \dfrac{x^2}{2}$, les solutions de l'équation complète sont alors les fonctions $z : x \mapsto K_1x + \dfrac{x^3}{2}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, et $z : x \mapsto K_3x + \dfrac{x^3}{2}$ sur $\mathbb{R}^{-*}$.

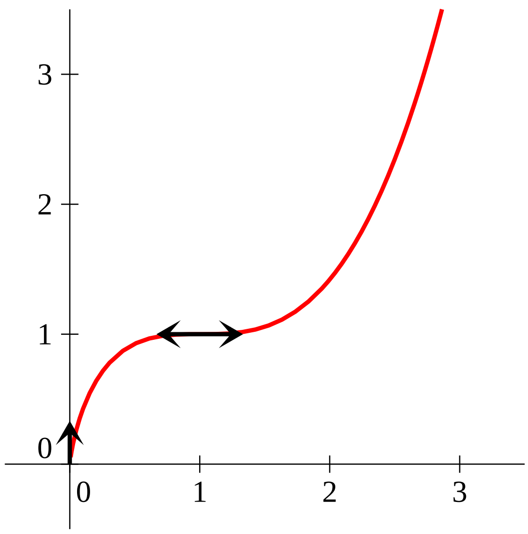
   En revenant à la définition de z, sur $\mathbb{R}^{+*}$, $xy' - y = K_1x + \dfrac{x^3}{2}$. L'équation homogène est la même que ci-dessus, donc $y_h(x) = L_1x$. Par la même méthode que ci-dessus, on cherche $y_p(x) = xL(x)$, où $x^2L'(x) = K_1x + \dfrac{x^3}{2}$, soit $L'(x) = \dfrac{K_1}{x} + \dfrac{x}{2}$. On peut choisir $L(x) = K_1\ln(x) + \dfrac{x^2}{4}$, ce qui donne pour les solutions de l'équation initiale $y : x \mapsto L_1x + K_1x\ln(x) + \dfrac{x^3}{4}$. On obtient de même sur $\mathbb{R}^{-*}$ les solutions $y : x \mapsto L_3x + K_3x\ln(-x) + \dfrac{x^3}{4}$.
3. Toutes les solutions obtenues sur chacun des deux intervalles ont des limites nulles en 0 (par croissance comparée, le terme $Kx\ln|x|$ tend vers 0). Cherchons à déterminer si la dérivée est également prolongeable : sur $\mathbb{R}^{+*}$, $y'(x) = L_1 + K_1\ln(x) + K_1 + \dfrac{3x^2}{4}$, qui est dérivable en 0 seulement si $K_1 = 0$. Sa dérivée en 0 vaut alors L_1. La dérivée sur $\mathbb{R}^{-*}$ est la même au nom

des constantes près, donc elle existe en 0 et vaut L_2, à condition d'imposer $K_2 = 0$. Il faut avoir $L_1 = L_2$ pour obtenir une solution dérivable sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire que ces solutions sont de la forme $x \mapsto Lx + \dfrac{x^3}{4}$. Voici quelques courbes intégrales de notre équation (une même couleur représente un même choix de constante sur les deux intervalles) : en rouge $K = L = 0$, en bleu $K = 0$ et $L = 1$, en vert $K = 0$ et $L = -1$ (ces trois solutions sont dérivables sur $\mathbb{R}$; en violet-rose, trois courbes pour lesquelles $K = 1$ et $L = 1$, $L = 0$, $L = -1$; en jaune-orange-marron les mêmes valeurs de L mais avec $K = -1$:



4. Puisqu'on est sur $\mathbb{R}^{+*}$, la solution est de la forme $y(x) = L_1 x + K_1 x \ln(x) + \dfrac{x^3}{4}$. Les deux conditions imposent $L_1 + \dfrac{1}{4} = 1$, soit $L_1 = \dfrac{3}{4}$; et $L_1 + K_1 + \dfrac{3}{4} = 0$, soit $K_1 = -\dfrac{3}{2}$. L'unique solution valide est donc $y(x) = \dfrac{3}{4}x - \dfrac{3}{2}x\ln(x) + \dfrac{1}{4}x^3$ (qui n'est pas une solution dérivable sur $\mathbb{R}$, on va donc l'étudier uniquement sur $\mathbb{R}^{+*}$). Cette fonction est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0; +\infty[$, de dérivée $y'(x) = \dfrac{3}{4} - \dfrac{3}{2}\ln(x) - \dfrac{3}{2} + \dfrac{3}{4}x^2$. On ne sait pas étudier le signe de cette dérivée, calculons $y''(x) = -\dfrac{3}{2x} + \dfrac{3}{2}x = \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{x^2-1}{x}\right)$. On peut alors dresser le tableau de variations suivant, en exploitant le fait que $y'(1) = 0$ (c'est la condition imposée pour la recherche de cette solution), et en ajoutant que $\lim\limits_{x\to 0} y(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = +\infty$ (on factorise par le terme prépondérant $\dfrac{1}{4}x^3$) :

x	0		1		$+\infty$
$y''(x)$		$-$	0	$+$	
y'	$+\infty$	↘	0	↗	
$y'(x)$		$+$	0	$+$	
y	0	↗	1	↗	$+\infty$
y		concave		convexe	



Exercice 3

Je vous laisse (re)lire le corrigé de la première question de l'exercice 11 de la feuille d'exercices n°4 sur les équations différentielles, puisqu'il s'agit de la même équation, et que j'avais déjà étudié dans ce corrigé le recollement des solutions.

Exercice 4

1. On reconnait une équation paramétrique de droite, passant par la point $M\left(0, 1, \frac{1}{4}\right)$ et de vecteur directeur $(1, 0, 0)$, c'est-à-dire $\overrightarrow{i}$.
2. On peut prendre $\overrightarrow{n}_m = (4+m^2, 4-m^2, -4m)$. Ce vecteur n'est jamais nul car sa première coordonnée ne s'annule jamais, donc l'équation de $\mathcal{P}_m$ est bien une équation de plan. Par ailleurs, $\| \overrightarrow{n}_m \| = \sqrt{(4+m^2)^2 + (4-m^2)^2 + (-4m)^2} = \sqrt{16 + 8m^2 + m^4 + 16 - 8m^2 + m^4 + 16m^2} = \sqrt{2(m^2 + 8m + 16)} = \sqrt{2}(m^2 + 4)$. Cette norme est minimale pour $m = 0$, et vaut alors $4\sqrt{2}$.
3. Calculons donc $\overrightarrow{n}_m . \overrightarrow{n}_p = (4+m^2)(4+p^2) + (4-m^2)(4-p^2) + (-4m)(-4p) = 16 + 4m^2 + 4p^2 + m^2p^2 + 16 - 4m^2 - 4p^2 + m^2p^2 + 16mp = 2(m^2p^2 + 8mp + 16) = 2(mp+4)^2$. Les deux plans sont perpendiculaires si leurs vecteurs normaux sont orthogonaux, ce qui se produit donc si $mp + 4 = 0$. Le plan correspondant à $m = 0$ n'est perpendiculaire à aucun autre plan de la

famille ; pour tout autre valeur de m, le plan $\mathcal{P}_m$ est perpendiculaire à un unique autre plan de la famille, le plan $\mathcal{P}_p$ pour $p = -\dfrac{4}{m}$ (qui n'est jamais égal à m, puisque de signe opposé).

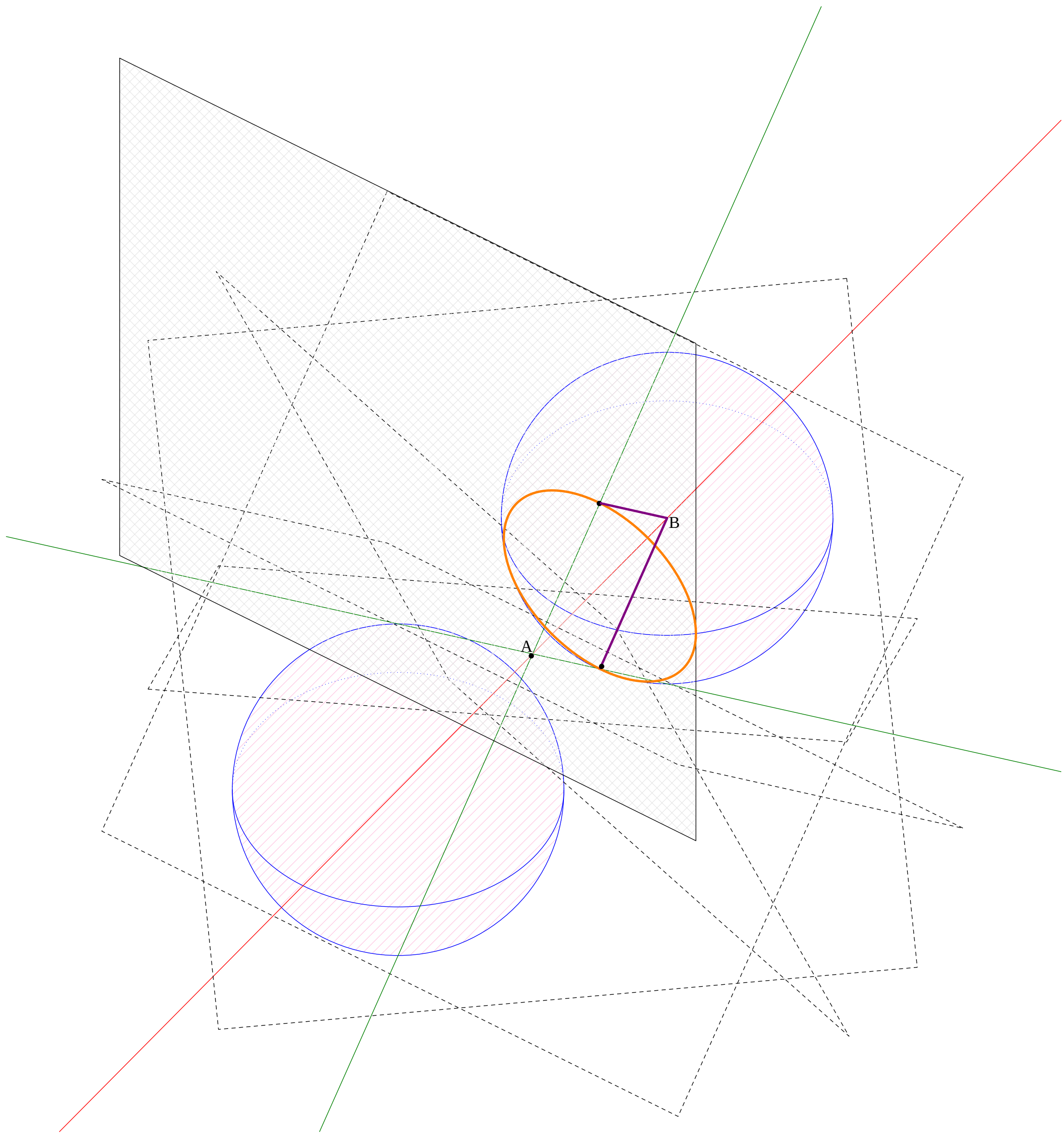
4. Pour changer de la méthode présentée en TD, cherchons l'intersection de Δ avec le plan $\mathcal{P}_m$ en injectant l'équation paramétrique de la droite dans celle du plan : $(4+m^2)t+4-m^2+m = m+8$ se produit si $(4+m^2)t = 4+m^2$, c'est-à-dire si $t = 1$. Le point d'intersection étant indépendant de m, tous les plans se coupent donc au point $A\left(1, 1, -\dfrac{1}{4}\right)$, qui appartient effectivement à la droite (Δ).
5. Soit $B_t\left(t, 1, -\dfrac{1}{4}\right)$ le point de Δ correspondant à la valeur t du paramètre, sa distance au plan $\mathcal{P}_m$ est donnée par la formule $d(B_t, \mathcal{P}_m) = \dfrac{|t(4+m^2)+4-m^2+m-m-8|}{\| \overrightarrow{n_m} \|}$ $= \dfrac{|t(m^2+4)-(m^2+4)|}{\sqrt{2}(m^2+4)} = \dfrac{|t-1|}{\sqrt{2}}$. Cette distance ne dépend donc pas de m, ce qui signifie que chaque point de la droite Δ est équidistant de tous les plans $\mathcal{P}_m$.
6. Une sphère de rayon $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ sera tangente à tous les plans de la famille si la distance de son centre à chacun de ces plans sera égale à $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. D'après la question précédente, cela se produit lorsque $|t-1| = 1$, c'est-à-dire $t = 0$ ou $t = 2$. On peut donc choisir comme centre le point $B_1\left(0, 1, -\dfrac{1}{4}\right)$, ou le point $B_2\left(2, 1, -\dfrac{1}{4}\right)$. La sphère $\mathcal{S}$ est donc la sphère de centre B_1 et de rayon $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, donc d'équation cartésienne $x^2+(y-1)^2+\left(z+\dfrac{1}{4}\right)^2 = \dfrac{1}{2}$ (inutile de développer, ce sera plus pratique pour la suite sous cette forme).
7. La distance de B_1 à la droite D_m est donnée par la formule $d(B_1, D_m) = \dfrac{\| \overrightarrow{AB_1} \wedge \overrightarrow{n_m} \|}{\| \overrightarrow{n_m} \|}$. Comme $\overrightarrow{AB_1} = (-1, 0, 0)$, on obtient $\overrightarrow{AB_1} \wedge \overrightarrow{n_m} = (0, 4m, m^2-4)$, qui a pour norme $\sqrt{(4m)^2+(m^2-4)^2} = \sqrt{16m^2+m^4-8m^2+16} = \sqrt{m^4+8m^2+16} = m^2+4$. On en déduit que $d(B_1, D_m) = \dfrac{m^2+4}{\sqrt{2}(m^2+4)} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Cette distance coïncidant avec le rayon de la sphère, la droite D_m est bien tangente à la sphère $\mathcal{S}$.
8. La droite D_m passe par le point A qui est commun à tous les plans $\mathcal{P}_m$, il suffit donc de vérifier que son vecteur directeur $\overrightarrow{n_m}$ est inclus dans le plan $\mathcal{P}_p$. Or, le plan $\mathcal{P}_p$ étant perpendiculaire à $\mathcal{P}_m$, il contient certainement le vecteur $\overrightarrow{n}_m$ normal au plan $\mathcal{P}_m$. Le plan $\mathcal{P}_p$ contient donc bien la droite D_m.

   Résumons ce que nous savons : tous les plans sont tangents à la sphère, donc $\mathcal{P}_p$ contient certainement une droite (et même plusieurs) tangente à la sphère. Parmi celles-ci, il en existe exactement une passant par le point A puisque ce dernier appartient au plan $\mathcal{P}_p$ (il est dans tous les plans de la famille). Il existe par ailleurs certainement une tangente à la sphère dans $\mathcal{P}_p$ dirigée par le vecteur $\overrightarrow{n_m}$, puisque celui-ci est orthogonal à $\overrightarrow{n_p}$. On peut même la décrire : c'est la tangente incluse dans le plan contenant le centre B_1 de la sphère ainsi que ses deux projetés orthogonaux sur les plans $\mathcal{P}_m$ et $\mathcal{P}_p$ (en effet, les deux rayons correspondants de la sphère sont dirigés par $\overrightarrow{n_m}$ et $\overrightarrow{n_p}$ et on sait que ces vecteurs sont orthogonaux, donc la figure formée par ces deux rayons et les deux tabgentes est un rectangle, les tangentes ont donc même vecteur directeur que les rayons). Seul problème : réussir à démontrer que le point A est nécessairement dans ce plan (si ce n'est pas le cas, D_m sera simplement parallèle à notre tangente). Comme ça n'a rien d'évident, on conclura que la méthode de la question précédente est plus sûre.
9. Il suffit d'injecter la condition $x = \dfrac{1}{2}$ dans l'équation de la sphère, ce qui donne $\dfrac{1}{4}+(y-1)^2+$

$\left(z+\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{2}$, soit $(y-1)^2 + \left(z+\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{4}$. On reconnait un cercle $\mathcal{C}$ de centre $\left(\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{4}\right)$ (on n'oublie pas qu'on s'est placé dans le plan $x = \frac{1}{2}$), et de rayon $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$.

10. Le point d'intersection C_m doit être tel que $\overrightarrow{AC_m}$ soit colinéaire à $\overrightarrow{n_m}$ (vecteur directeur de la droite D_m), donc $\overrightarrow{AC_m} = k\overrightarrow{n_m}$ pour un certain réel k. Or, en notant $C_m\left(\frac{1}{2}, y, z\right)$, on a $\overrightarrow{AC_m} = \left(-\frac{1}{2}, y-1, z+\frac{1}{4}\right)$. La comparaison de la première coordonnée avec celle de $\overrightarrow{n_m}$ donne $-\frac{1}{2} = k(m^2+4)$, soit $k = -\frac{1}{2(m^2+4)}$. On en déduit $y - 1 = k(4-m^2) = \frac{m^2-4}{2(m^2+4)}$, soit $y = \frac{3m^2+4}{2(m^2+4)}$; et $z + \frac{1}{4} = -4km = \frac{2m}{m^2+4}$, soit $z = \frac{m^2+8m+4}{4(m^2+4)}$. On peut conclure que C_m a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}, \frac{3m^2+4}{2(m^2+4)}, \frac{m^2+8m+4}{4(m^2+4)}\right)$. Pour vérifier que ce point appartient à $\mathcal{S}$, il suffit de dire que $\overrightarrow{AC_m} = -\frac{1}{2(m^2+4)}\overrightarrow{n_m}$, donc $AC_m = \parallel \overrightarrow{AC_m} \parallel = \frac{\parallel \overrightarrow{n_m} \parallel}{2(m^2+4)} = \frac{\sqrt{2}(m^2+4)}{2(m^2+4)} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Cette distance coïncide avec le rayon de la sphère, le point C_m appartient donc à $\mathcal{S}$. Comme on a vu que l'intersection du plan d'équation $x = \frac{1}{2}$ et de $\mathcal{S}$ était le cercle $\mathcal{C}$, notre point C_m appartient à $\mathcal{C}$. On peut même pousser jusqu'à vérifier que les expression obtenues pour $y-1$ et $z+\frac{1}{4}$ prennent presque toutes les valeurs possibles entre $-\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$ (pour $y-1$ par exemple, les limites quand m tend vers $+\infty$ et $-\infty$ sont égales à $\frac{1}{2}$, et $y-1$ atteint un minimum pour $m = 0$ de valeur $-\frac{1}{2}$), ce qui prouve que les points C_m parcourent tout le cercle $\mathcal{C}$ (qui a pour rayon $\frac{1}{2}$), à l'exception du point vérifiant $y - 1 = \frac{1}{2}$ (et $z + \frac{1}{4} = 0$ dans ce cas pour vérifier l'équation du cercle), c'est-à-dire à l'exception du point $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right)$.

J'ai tenté d'achever ce corrigé par une figure en 3D, je ne suis pas sûr que tout soit lisible, je vous rajoute les légendes que j'ai préféré ne pas mettre directement sur la figure pour ne pas surcharger : en rouge la droite Δ ; en pointillés noirs quelques plans de la famille $\mathcal{P}_m$, qui se coupent au point A ; en bleu rayé de rose les deux sphères de la question 5, $\mathcal{S}$ étant en haut à droite ; en vert deux des droites D_m avec indiqués en noirs leurs points de tangence avec $\mathcal{S}$ (en violet les deux rayons correspondants de la sphère $\mathcal{S}$, le quadrilatère constitués des deux segments violets et des segments reliant les deux poins de tangence et A est un carré) ; en noir hachuré de gris le plan d'équation $x = \frac{1}{2}$; enfin en orange le cercle $\mathcal{C}$.


A
B