TD n°5 : Révisions pour le DS3

PTSI B Lycée Eiffel

23 novembre 2012

Exercice 1

Étudier le plus complètement possible (on cherchera notamment les points d'inflexion et les tangentes à la courbe en ces points) la fonction $f : x \mapsto (2x^2 + 2x - 1)e^{-2x}$, et tracer sa courbe représentative le plus soigneusement possible.

Exercice 2

On considère l'équation différentielle $x^2y'' - xy' + y = x^3$.

1. En posant $z = xy' - y$, montrer que z est solution d'une équation différentielle du premier ordre.
2. Résoudre cette équation, et en déduire les solutions de l'équation initiale.
3. Existe-t-il des solutions définies sur $\mathbb{R}$ de cette équation ?
4. Montrer qu'il existe une unique solution de l'équation vérifiant $y(1) = 1$ et $y'(1) = 0$. Étudier cette solution et tracer une allure de sa courbe représentative.

Exercice 3

On considère l'équation différentielle $4xy'' + 2y' - y = 0$.

1. Résoudre cette équation sur $\mathbb{R}^{+*}$ en posant $t = \sqrt{x}$.
2. Effectuer une résolution similaire sur $\mathbb{R}^{-*}$.
3. Existe-t-il des solutions définies sur $\mathbb{R}$?

Exercice 4

Dans tout cet exercice, on suppose fixé un repère orthonormal $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ de l'espace. Pour tout réel m, on définit le plan $\mathcal{P}_m$ par l'équation $(4 + m^2)x + (4 - m^2)y - 4mz = m + 8$. On note par ailleurs Δ l'ensemble défini par le système d'équations paramétriques $\begin{cases} x = t \\ y = 1 \\ z = -\frac{1}{4} \end{cases}$, où $t \in \mathbb{R}$.

1. Préciser la nature géométrique de Δ, ainsi que ses éléments caractéristiques.
2. Donner un vecteur normal $\overrightarrow{n}_m$ au plan $\mathcal{P}_m$, montrer qu'il n'est jamais nul, et calculer sa norme. Pour quelle valeur de m cette norme est-elle minimale ?
3. Pour tout couple de réels distincts (p, m), calculer le produit scalaire $\overrightarrow{n}_m.\overrightarrow{n}_p$. À quelle condition sur m et p les plans $\mathcal{P}_m$ et $\mathcal{P}_p$ sont-ils perpendiculaires ?
4. Montrer que tous les plans $\mathcal{P}_m$ se coupent en un point de Δ.

5. Déterminer la distance de chaque point de l'ensemble Δ à chacun des plans $\mathcal{P}_m$. que constate-ton de surprenant ?
6. Déterminer toutes les sphères de rayon $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ centrées sur Δ et tangentes à tous les plans $\mathcal{P}_m$. On note $\mathcal{S}$ celle dont le centre a la plus petit abscisse, donner une équation cartésienne de $\mathcal{S}$.
7. Montrer que la droite D_m passant par $A\left(1, 1, -\dfrac{1}{4}\right)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{n}_m$ est tangente à la sphère $\mathcal{S}$.
8. Montrer que la droite D_m est incluse dans le plan $\mathcal{P}_p$ perpendiculaire à $\mathcal{P}_m$, et retrouver ainsi le résultat de la question précédente.
9. Déterminer l'intersection du plan d'équation $x = \dfrac{1}{2}$ avec la sphère $\mathcal{S}$ (on donnera les coordonnées du centre, et le rayon).
10. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de ce même plan avec la droite D_m et vérifier qu'il appartient à $\mathcal{S}$. Dans quel ensemble simple ces points sont-ils inclus lorsque m parcourt $\mathbb{R}$?