TD n°4 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

13 novembre 2012

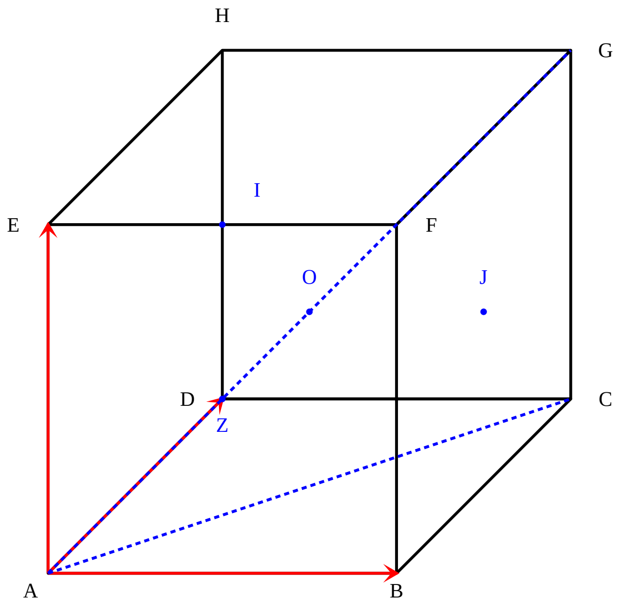
Exercice 1

On considère dans l'espace les points $A(2,1,2)$, $B(1,1,3)$, $C(-1,2,-2)$, $D(3,0,8)$ et $E(2,-2,-4)$.

1. On calcule $\overrightarrow{BE}(1,-3,-7)$ et $\overrightarrow{AD}(1,-1,6)$, donc $\overrightarrow{BE} \wedge \overrightarrow{AD}(-25,13,2)$.
2. On calcule $\overrightarrow{BD}(2,-1,5)$ et $\overrightarrow{CE}(3,-4,-2)$, puis $\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{CE} = 6+4-10 = 0$, donc les vecteurs sont bien orthogonaux.
3. On calcule $\overrightarrow{AB}(-1,0,1)$, $\overrightarrow{AC}(-3,1,-4)$ et on connait déjà $\overrightarrow{AD}(1,-1,6)$, ce qui permet de calculer $[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}] = \begin{vmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -4 & 6 \end{vmatrix} = 1\times(-1)+1\times(4+3)+6\times(-1) = 0$. Les points A, B, C et D sont donc coplanaires.
4. On peut constater que dans le plan (ABC), la relation $2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ permet d'assurer que les points C et D sont de part et d'autre de la droite (AB). Autrement dit, l'aire du quadrilatère $ABCD$ est égale à la somme des aires de ABC et ABD, soit à $\frac{1}{2}(\| \overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC} \| + \| \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD} \|)$. Il faut multiplier ces aires par la hauteur du solide (puis diviser par 3 puisqu'il s'agit d'une pyramide), c'est-à-dire par la distance du point E au plan (ABC). Cette distance pouvant se calculer, on a tous les éléments pour achever le calcul du volume. Allez, faisons-le, même si je donnerai une meilleure méthode plus bas. On a $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}(-1,-7,-1)$ et $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}(1,7,1)$ (le fait qu'on obtienne des produits vectoriels opposés n'est pas surprenant au vu de la relation $2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$), donc l'aire du quadrilatère $ABCD$ est égale à $\sqrt{1+49+1} = \sqrt{51}$ (les deux normes sont égales, ce qui simplifie le facteur $\frac{1}{2}$ apparaissant dans l'aire des triangles). Reste à calculer la distance de E au plan (ABC), Comme $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ forme une base du plan (ABC), on peut utiliser la formule $d(E,(ABC)) = \dfrac{|\det(\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})|}{\| \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \|}$. On se rend compte qu'on a calculé la norme précédente pour rien puisqu'on va diviser par cette même valeur, et qu'il suffit donc de calculer $|[\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]| = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -3 \\ -3 & 0 & 1 \\ -6 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -3\times(-3) - 1\times -6 - 4 \times -3 = 27$. En divisant par trois, le volume du solide $ABCDE$ est donc égal à 9.

   On peut également faire un peu plus rapide en utilisant nos connaissances sur les volumes de parallélépipèdes et la linéarité du produit mixte. Le volume du solide $ABCE$ est égal au sixième du volume du parallélépipède construit sur les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AE}$, donc à $\dfrac{|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AE}]|}{6}$. De même, le volume du solide $ABDE$ vaut de même $\dfrac{|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DA},\overrightarrow{AE}]|}{6}$. En faisant la somme des deux (le fait d'avoir choisi $\overrightarrow{DA}$ et pas $\overrightarrow{AD}$ comme deuxième vecteur dans le deuxième produit mixte assure que les deux produits mixtes sont de même signe, ce qui permet d'additionner les deux valeurs absolues), on peut appliquer la trilinéarité du produit mixte (sur la variable du milieu) pour obtenir la formule $\dfrac{|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DA},\overrightarrow{AE}]|}{6}$. On calcule alors $\overrightarrow{AB}(-1,0,1)$, $\overrightarrow{DC}(4,-2,10)$ et $\overrightarrow{AE}(0,-3,-6)$, puis $|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}]| = \begin{vmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & -3 \\ 1 & 10 & -6 \end{vmatrix} = 0 + 3\times(-14) - 6\times 2 = -54$, ce qui donne un volume pour le solide $ABCDE$ égal à $\dfrac{54}{6} = 9$.

Exercice 2



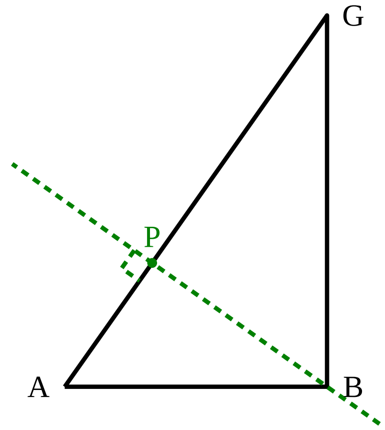
1. On a $C(1,1,0)$, $F(0,1,1)$, $G(1,1,1)$ et $H(1,0,1)$. Si on tient absolument à justifier, on utilise des égalités vectorielles du type $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{DH}$ et $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{EG}$.
2. Méthode rustique : on applique le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle ABC pour obtenir $AC = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$, puis dans le triangle rectangle ACG pour obtenir $AG = \sqrt{\sqrt{2}^2 + 1^2} = \sqrt{3}$.

   Méthode sophistiquée : $AC = \| \overrightarrow{AC} \| = \sqrt{1^2+1^2+0^2} = \sqrt{2}$, et $AH = \| \overrightarrow{AG} \| = \sqrt{1^2+1^2+1^2} = \sqrt{3}$.
3. Par exemple pour la diagonale (AC) : A et C sont évidemment à distance 0, E et G à distance 1 puisque leurs projetés respectifs sur la droite sont A et C ; B et D sont à distance $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ car les triangles ABK et ADK, où K est le milieu de $[AC]$, sont rectangles isocèles. Enfin, les triangles KBF et KDH étant rectangles, un coup de Pythagore permet d'obtenir $KF = KH = \sqrt{1^2 + \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{3}{2}}$, qui sont les distances des points F et H à la droite (AC).

   Pour une méthode plus sophistiquée, on utilise la distance d'un point à une droite. Ici, le vecteur directeur $\overrightarrow{AC}$ a pour norme $\sqrt{2}$, et on a par exemple $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = (0,0,1)$, donc

$d(B,(AC)) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. De même, $\overrightarrow{AE} \wedge \overrightarrow{AC} = (-1,1,0)$, donc $d(E,(AC)) = \dfrac{\sqrt{(-1)^2+1^2}}{\sqrt{2}} = 1$. Enfin, $\overrightarrow{AF}\overrightarrow{AC} = (-1,1,-1)$, donc $d(F,(AC)) = \dfrac{\sqrt{(-1)^2+1^1+(-1)^2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\dfrac{3}{2}}$.

Pour la grande diagonale, méthode rustique : A et G sont à distance nulle, pour B par exemple on se place dans le triangle rectangle ABG et on cherche la hauteur issue de B dans ce triangle, notons P le projeté orthogonal de B sur (AG).



Le triangle a pour aire $\dfrac{1}{2}AG \times BP = BP\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, mais aussi $\dfrac{1}{2}AB \times BG = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, donc $BP = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \times \dfrac{2}{\sqrt{3}} = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$. Les distances des cinq autres sommets du cube à la droite (AG) sont aussi égales à $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ (on peut dessiner des situations semblables à celle qu'on vient d'étudier pour chacun d'eux).

Et pour un calcul plus savant, $d(B,(AG)) = \dfrac{\| \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AG} \|}{\| \overrightarrow{AG} \|}$, avec $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AG} = (0,-1,1)$, donc $d(B,(AG)) = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

4. Le triangle AGH est rectangle en H, son aire vaut $\dfrac{1}{2}AH \times HG = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; le triangle AFH est équilatéral de côté $\sqrt{2}$, donc de hauteur $\dfrac{\sqrt{2}\times\sqrt{3}}{2} = \sqrt{\dfrac{3}{2}}$, donc son aire vaut $\dfrac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{\dfrac{3}{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

   Méthode sophistiquée : $\overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{AH} = (1,0,-1)$, donc l'aire de AGH vaut $\dfrac{1}{2}\sqrt{1^2+(-1)^2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; et $\overrightarrow{AF} \wedge \overrightarrow{AH} = (1,1,-1)$ donc l'aire de AFH vaut $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

5. Faisons-le pour (AC) : l'angle avec les faces $(ABCD)$ et $(EFGH)$ est évidemment nul, l'angle avec chacune des quatre autres faces vaut $\dfrac{\pi}{4}$ car les triangles ABC et ACD sont isocèles rectangles. L'angle formé par la droite (AG) avec chacune des six faces est identique, par exemple avec la face $(ABCD)$ il s'agit de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AG}})$ (car C est le projeté orthogonal de

G sur $(ABCS)$), qui vaut $\arccos\left(\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$, ou si on préfère $\arctan\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (ce n'est pas un angle remarquable).

Il n'y a pas de méthode sophistiquée très intéressante ici, on peut toujours déterminer l'angle avec un produit scalaire (ou vectoriel) mais il faut déjà connaitre le projeté de G sur $(ABCD)$.

6. Le tétraèdre $ABFG$ a par exemple pour hauteur $AB = 1$ et pour base le triangle BFG d'aire $\dfrac{1}{2}$, donc il a pour volume $\dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{6}$; $OFGH$ a pour hauteur $d(O, (EFGH)) = \dfrac{1}{2}$ et pour base le triangle FGH d'aire $\dfrac{1}{2}$, son volume vaut $\dfrac{1}{12}$; enfin, pour $AIJO$, on peut remarquer que le plan (IJO) est en fait le plan $(CDEF)$, donc la hauteur issue de A vaut $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (le projeté prthogonal de A sur $(CDEF)$ est le centre de la face $(ADEH)$). La base est ici le triangle OIJ, qui est rectangle en O, avec $OJ = \dfrac{1}{2}$ et $OI = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, donc elle a pour aire $\dfrac{\sqrt{2}}{8}$. Finalement, le tétraèdre $AIJO$ a pour volume $\dfrac{1}{24}$.

   La méthode sophistiquée consiste à calculer des produits mixtes pour obtenir les volumes de parallélépipèdes, et à les diviser par 6 pour retrouver le volume du tétraèdre. Pour $ABFG$, $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AG}] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times 0 - 1 \times 1 + 1 \times 0 = -1$, donc $ABFG$ a pour volume $\dfrac{1}{6}$. Pour $OFGH$, le point O ayant pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$, $[\overrightarrow{OF}, \overrightarrow{OG}, \overrightarrow{OH}] = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\dfrac{1}{2} \times \left(-\dfrac{1}{2}\right) + \dfrac{1}{2} \times 0 + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$, donc $OFGH$ a pour volume $\dfrac{1}{12}$. Enfin, I a pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{2}, 0, 1\right)$ et $J\left(1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$, donc $[\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}, \overrightarrow{AO}] = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \dfrac{1}{2} \times \left(-\dfrac{1}{2}\right) - \dfrac{1}{2} \times \left(-\dfrac{3}{4}\right) + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{4}$, donc $AOIJ$ a pour volume $\dfrac{1}{24}$.

7. On va utiliser directement une méthode sophistiquée pour cette dernière question. Commençopns par constater que le point Z appartient bien à la droite (AG) puisque $\overrightarrow{AZ} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AG}$. Vérifions que $(BZ) \perp (AZ)$: $\overrightarrow{BZ} = \left(\dfrac{2}{3}, -\dfrac{1}{3}, -\dfrac{1}{3}\right)$, donc $\overrightarrow{BZ}.\overrightarrow{AZ} = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{3} = 0$. Le point Z est donc bien le projeté orthogonal de B sur (AG). Les calculs pour D et E sont extrêmement similaires. Pour déterminer les angles, on va passer par un calcul de produit scalaire. Puisque $\overrightarrow{BZ} = \left(\dfrac{2}{3}, -\dfrac{1}{3}, -\dfrac{1}{3}\right)$ et $\overrightarrow{DZ} = \left(-\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}, -\dfrac{1}{3}\right)$, les deux vecteurs ont pour norme $\sqrt{\dfrac{1}{9} + \dfrac{4}{9} + \dfrac{1}{9}} = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$, donc pour produit scalaire $\dfrac{2}{3} \times \cos(\widehat{\overrightarrow{ZB}, \overrightarrow{ZD}})$. Or, $\overrightarrow{BZ}.\overrightarrow{DZ} = -\dfrac{2}{9} - \dfrac{2}{9} + \dfrac{1}{9} = -\dfrac{1}{3}$. Le cosinus de l'angle (géométrique) recherché vaut donc $-\dfrac{1}{2}$, l'angle est égal à $\dfrac{2\pi}{3}$. Les deux autres angles sont les mêmes. On peut d'ailleurs démontrer cette propriété autrement en constatant que le triangle BDE est équilatéral et que Z est son centre.

8. **Question bonus : Montrer que le plan passant par O et perpendiculaire à (AG) a une intersection avec le cube qui est un hexagone régulier.**

   Le plan en question a pour vecteur normal $\overrightarrow{AG}(1, 1, 1)$, donc admet une équation cartésienne du type $x + y + z + d = 0$. Comme O appartient au plan, $d = -\dfrac{3}{2}$, donc l'équation peut être écrite $2x + 2y + 2z - 3 = 0$. Il est alors facile de constater que les points $M_1\left(1, \dfrac{1}{2}, 0\right)$;

$M_2\left(1,0,\dfrac{1}{2}\right)$; $M_3\left(\dfrac{1}{2},0,1\right)$; $M_4\left(\dfrac{1}{2},1,0\right)$; $M_5\left(0,\dfrac{1}{2},1\right)$ et $M_6\left(0,1,\dfrac{1}{2}\right)$ appartiennent au plan. Or, ces six points sont des milieux d'arêtes du cube (respectivement de $[BC]$, $[BF]$, $[EF]$, $[DC]$, $[EH]$ et $[DH]$, et on vérifie sans difficulté que les six triangles OM_1M_2, OM_2M_3, OM_3M_5, OM_5M_6, OM_6M_4 et OM_4M_1 sont équilatéraux. Par exemple pour OM_1M_2, on a $OM_1 = \sqrt{\dfrac{1}{4}+0+\dfrac{1}{4}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$; $OM_2 = \sqrt{\dfrac{1}{4}+0+\dfrac{1}{4}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et $M_1M_2 = \sqrt{0+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. L'hexagone $M_1M_2M_3M_5M_6M_4$ est donc régulier et centré en O, et il constitue l'intersection de notre plan avec le cube.