TD n°3 : Corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

11 octobre 2012

Problème 1

1. On doit donc résoudre l'équation $f(z) = z$, c'est-à-dire $z = 2z(1-z)$, ou encore $z(1-2+2z) = 0$. On trouve donc deux valeurs possibles : $z = 0$ et $z = \frac{1}{2}$.
2. Commençons par résoudre $f(z) = -4$, soit $-2z^2 + 2z + 4 = 0$. Cette équation du second degré a pour discriminant $\Delta = 4 + 32 = 36$, et admet deux racines $z_1 = \frac{-2+6}{-4} = -1$, et $z_2 = \frac{-2-6}{-4} = 2$.
   Passons à $f(z) = 2 + 2i$, qui donne $-2z^2 + 2z - 2 - i = 0$, qu'on peut écrire plus simplement $z^2 - z + 1 + i = 0$. Cette équation du second degré a pour discriminant $\Delta = 1 - 4(1+i) = -3 - 4i$. Cherchons $\delta = a + ib$ tel que $\delta^2 = \Delta$, on obtient les deux équations $a^2 - b^2 = -3$ et $2ab = -4$. On peut ajouter la condition sur le module $a^2 + b^2 = \sqrt{9+16} = 5$. En additionnant et soustrayant comme d'habitude, $2a^2 = 2$, soit $a = \pm 1$ et $2b^2 = 8$, soit $b = \pm 2$. Comme a et b doivent être de signe contraire, on peut prendre $\delta = 1 - 2i$. On obtient alors comme antécédents $z_1 = \frac{1+1-2i}{2} = 1 - i$, et $z_2 = \frac{1-1+2i}{2} = i$.
3. Allons-y peu subtilement. Si on pose $z = a + ib$, on a $f(z) = 2(a+ib)(1-a-ib) = 2(a - a^2 - iab + ib - iab + b^2)$, qui est réel si $b - 2ab = 0$, soit $b(1-2a) = 0$. On peut donc avoir $b = 0$ (c'est-à-dire que z est un réel), ou $a = \frac{1}{2}$ (droite parallèle à l'axe imaginaire).
   Calculer l'image de l'axe réel est étrangement plus compliqué, on a toujours $f(x) = 2x(1-x)$, mais avec cette fois-ci $x \in \mathbb{R}$. On peut donc étudier cette fonction avec les techniques classiques sur les fonctions d'une variable réelle. Ainsi, $f'(x) = -4x + 2$ s'annule en $x = \frac{1}{2}$, comme $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$, on obtient pour f le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
f	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$-\infty$

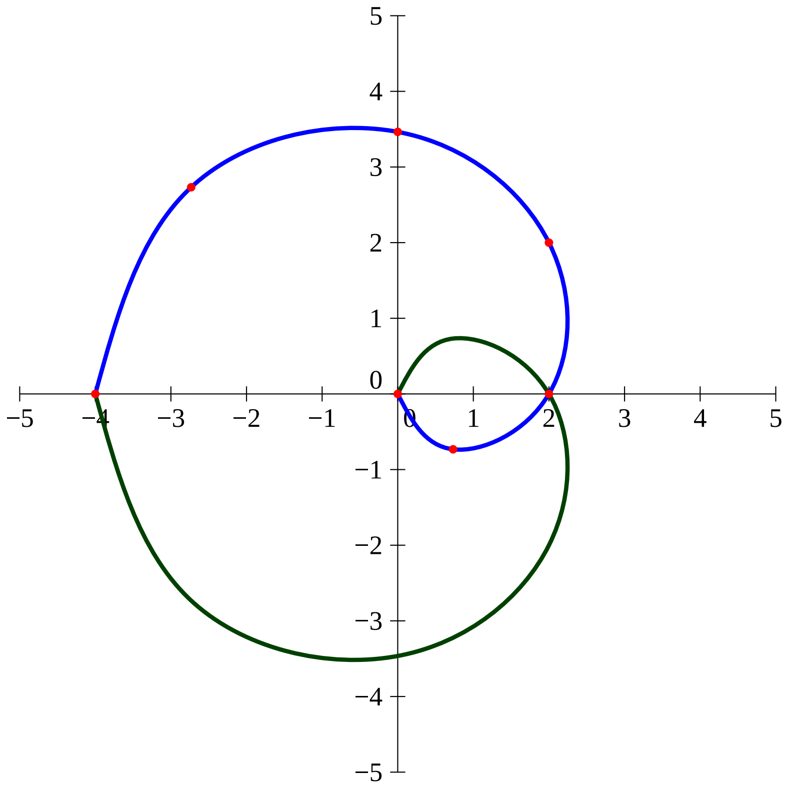
   La fonction f prend donc sur l'axe réel toutes les valeurs réelles inférieures à $-\frac{1}{2}$. Autrement dit, $f(\mathbb{R}) = \left]-\infty; \frac{1}{2}\right]$.
4. Examinons la condition $f(z_1) = f(z_2)$: $2z_1 - 2z_1^2 = 2z_2 - 2z_2^2$, soit en divisant tout par deux $z_1 - z_2 = z_1^2 - z_2^2 = (z_1 - z_2)(z_1 + z_2)$. Si on exclut le cas peu intéressant $z_1 = z_2$, on peut diviser par $z_1 - z_2$ pour obtenir $1 = z_1 + z_2$, soit $z_2 = 1 - z_1$. Autrement dit, $z_2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - z_1$, ce qui signifie que les points d'affixe z_1 et z_2 sont symétriques par rapport au point d'affixe $\frac{1}{2}$.

5. L'équation $f(z) = a$, où $a \in \mathbb{C}$, est une équation de second degré, elle auta toujours des solutions. Tout nombre complexe a donc au moins un antécédent par f. Le nombre a aura un seul antécédent si l'équation $2z - 2z^2 = a$ a un discriminant nul, soit $4 - 8a = 0$, donc $a = \dfrac{1}{2}$. Le nombre réel $\dfrac{1}{2}$ est donc le seul à avoir un unique antécédent (en l'occurence lui-même).

6. Calculons donc $f(ib) = 2ib(1 - ib) = 2b^2 + 2ib$. En notant $x = 2b^2$ et $y = 2b$, on constate que $\dfrac{y^2}{2} = \dfrac{4b^2}{2} = 2b^2 = x$. Le point d'affixe $f(ib)$ est donc bien situé sur la parabole d'équation $x = \dfrac{y^2}{2}$.

7. (a) Calculons $f(e^{i\theta}) = 2e^{i\theta}(1 - e^{i\theta}) = 2e^{i\theta}e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}) = 2e^{i\frac{3\theta}{2}}\left(-2i\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\right)$ $= 4\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)e^{-i\frac{\pi}{2}}e^{i\frac{3\theta}{2}} = 4\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{3\theta-\pi}{2}}$. En particulier, on trouve un module égal à $4\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$ (en prenant $\theta \in [0; 2\pi]$ pour toujours avoir un sinus de l'angle moitié positif) et un argument de $\dfrac{3\theta - \pi}{2}$.

   (b) Pour $\theta = 0$, $f(e^{i\theta}) = f(1) = 0$; pour $\theta = \dfrac{\pi}{6}$, le module vaut $4\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \sqrt{6} - \sqrt{2}$ et l'argument $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\pi}{2} - \pi\right) = -\dfrac{\pi}{4}$. On peut aussi calculer directement $f(e^{i\frac{\pi}{6}}) = \sqrt{3} - 1 + i(1 - \sqrt{3})$. Pour $\theta = \dfrac{\pi}{3}$, on a un module $4\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 2$, et un argument de $\dfrac{1}{2}(\pi - \pi) = 0$, donc $f(e^{i\frac{\pi}{3}}) = 2$. Ensuite, si $\theta = \dfrac{\pi}{2}$, module $2\sqrt{2}$ et argument $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3\pi}{2} - \pi\right) = \dfrac{\pi}{4}$, donc $f(e^{i\theta}) = 2 + 2i$. On enchaine avec $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$, module $2\sqrt{3}$, argument $\dfrac{1}{2}(2\pi - \pi) = \dfrac{\pi}{2}$, soit $f(e^{i\frac{2\pi}{3}}) = 2\sqrt{3}i$. Pour $\theta = \dfrac{5\pi}{6}$, module $\sqrt{6} + \sqrt{2}$, argument $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{15\pi}{6} - \pi\right) = \dfrac{3\pi}{4}$, soit $f(e^{i\frac{2\pi}{3}}) = -\sqrt{3} - 1 + i(\sqrt{3} + 1)$. Enfin, pour $\theta = \pi$, $f(-1) = -4$. Ce qui donne une allure ressemblant à ceci (les points sont en rouge, la courbe en bleu, ça doit ressembler à une sorte de spirale, en vert la symétrique pour l'autre moitié de cercle trigonométrique) :



(c) Il suffit de calculer $f(e^{i(2\pi-\theta)})$: le module est le même que pour $f(e^{i\theta})$, l'argument vaut $\dfrac{3(2\pi-\theta)-\pi}{2} = \dfrac{5\pi-3\theta}{2} = -\dfrac{3\theta-\pi}{2}+2\pi$, donc l'argument est opposé à celui de $f(e^{i\theta})$. Autrement dit, les images des points situés en bas du cercle trigonométrique sont les conjugués des images des points du haut. Il suffit donc de faire une symétrie par rapport à l'axe réel pour obtenir la deuxième moitié de l'image du cercle trigonométrique.

Problème 2

1. Si on note les points de la même façon que leur affixe complexe, cet argument correspond à l'angle $(\widehat{ba, bc})$. Les trois points sont donc alignés si cet argument est nul (modulo π), c'est-à-dire si $\dfrac{a-b}{c-b} \in \mathbb{R}$.

2. Si les quatre points sont alignés, chacun des deux rapports $\dfrac{a-b}{c-b}$ et $\dfrac{c-d}{a-d}$ est réel, donc le birapport l'est également.

3. Avec les notations de l'énoncé, on peut écrire que $a = z + re^{i\alpha}$, $b = z + re^{i\beta}$, $c = z + re^{i\gamma}$ et $d = z + re^{i\delta}$. On calcule alors $\dfrac{(a-b)(c-d)}{(c-b)(a-d)} = \dfrac{(re^{i\alpha}-re^{i\beta})(re^{i\gamma}-re^{i\delta})}{(re^{i\gamma}-re^{i\beta})(re^{i\alpha}-re^{i\delta})}$. On peut factoriser par r en haut et en bas (ça se simplifie) et factoriser chaque parenthèse par l'angle moitié de la somme des deux angles présents, par exemple $e^{i\alpha}-e^{i\beta} = e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}(e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}}-e^{i\frac{\beta-\alpha}{2}}) = e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}} \times \left(2i\sin\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)\right)$. On peut donc écrire $[a,b,c,d] = \dfrac{e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}} \times (2i\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})) \times e^{i\frac{\gamma+\delta}{2}} \times (2i\sin(\frac{\gamma-\delta}{2}))}{e^{i\frac{\gamma+\beta}{2}} \times (2i\sin(\frac{\gamma-\beta}{2})) \times e^{i\frac{\alpha+\delta}{2}} \times (2i\sin(\frac{\alpha-\delta}{2}))}$. Les exponentielles en haut et en bas se simplifient (on a de chaque côté $e^{i\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{2}}$, tous les $2i$ également, il ne reste plus que $[a,b,c,d] = \dfrac{\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\sin(\frac{\gamma+\delta}{2})}{\sin(\frac{\gamma+\beta}{2})\sin(\frac{\delta+\beta}{2})}$, qui est certainement un nombre réel.

4. On peut écrire la condition de birapport réel sous la forme $\arg\left(\dfrac{a-b}{c-b}\right) = \arg\left(\dfrac{c-d}{a-d}\right)$, ce qui signifie au vu de la première question que $\widehat{ABC} \equiv \widehat{ADC}[\pi]$.
5. Notons k le birapport des quatre points, on a alors $(a-b)(c-d) = k(c-b)(a-d)$, soit $ac + bd - bc - ad = kac + kbd - kab - kcd$. On peut donc écrire $d = \dfrac{kac - kab + bc - ac}{b - a - kb + kc}$ qui appartient certainement à $\mathbb{R}$.
6. Si $z = e^{i\theta}$, $f(z) = i\dfrac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}} = i\dfrac{e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}}{e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}})} = i\dfrac{2\cos(\frac{\theta}{2})}{-2i\sin(\frac{\theta}{2})} = -\dfrac{1}{\tan(\frac{\theta}{2})} \in \mathbb{R}$. Inversement, si $f(z) \in \mathbb{R}$, en notant $z = a+ib$, $\dfrac{1+a+ib}{1-a-ib} \in i\mathbb{R}$, soit $\mathrm{Re}\,((1+a+ib)(1-a+ib)) = 0$. On obtient donc $1 - a + a - a^2 - b^2 = 0$, soit $a^2 + b^2 = 1$. On retombe bien sur le cercle trigonométrique.
7. Calculons courageusement $[f(a), f(b), f(c), f(d)] = \dfrac{(f(a) - f(b))(f(c) - f(d))}{(f(c) - f(b))(f(a) - f(d))}$

$$= \frac{(i\frac{1+a}{1-a} - i\frac{1+b}{1-b})(i\frac{1+c}{1-c} - i\frac{1+d}{1-d})}{(i\frac{1+c}{1-c} - i\frac{1+b}{1-b})(i\frac{1+a}{1-a} - i\frac{1+d}{1-d})} = \frac{i^2\frac{(1+a)(1-b)-(1+b)(1-a)}{(1-a)(1-b)}\frac{(1+c)(1-d)-(1+d)(1-c)}{(1-c)(1-d)}}{i^2\frac{(1+c)(1-b)-(1+b)(1-c)}{(1-c)(1-b)}\frac{(1+a)(1-d)-(1+d)(1-a)}{(1-a)(1-d)}}$$
$$= \frac{(1+a-b-ab-1-b+a+ab)(1+c-d-cd-1-d+c+cd)}{(1+c-b-bc-1-b+c+bc)(1+a-d-ad-1-d+a+ad)}$$
$$= \frac{4(a-b)(c-d)}{4(c-b)(a-d)} = [a, b, c, d].$$

8. En exploitant les question précédentes, sous les hypothèses statuées, $[f(a), f(b), f(c), f(d)] = [a, b, c, d] \in \mathbb{R}$, avec $f(a)0$, $f(b)$, $f(c) \in \mathbb{R}$ d'après la question 6. La question 5 permet alors d'affirmer que $f(d) \in \mathbb{R}$ ce qui en revenant à la question 6 prouve que $d \in \mathbb{U}$.

   Si par exemple $a = 1$, on multiplie les quatre nombres a, b, c et d par $e^{i\theta}$ (pour un θ choisi de façon à ne plus avoir de nombre égal à 1), ça ne modifie pas le birapport (puisqu'on introduit deux facteurs $e^{i\theta}$ au numérateur et deux au dénominateur), ni le fait que a, b et c soient de module 1. On en déduit à l'aide du raisonnement précédent que $e^{i\theta}d \in \mathbb{U}$, donc $d \in \mathbb{U}$ comme précédemment.