TD n°3 : Complexes

PTSI B Lycée Eiffel

11 octobre 2012

Problème 1

On considère dans ce problème l'application $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = 2z(1-z)$.

1. Déterminer les points du plan complexe invariants par l'application f.
2. Déterminer les antécédents par f de -4, ainsi que ceux de $2+2i$.
3. Déterminer les nombres complexes ayant une image réelle par f. Déterminer l'image de l'axe réel par f.
4. Déterminer une condition pour que deux nombres complexes z_1 et z_2 aient la même image par f. Interpréter ce résultat géométriquement.
5. Quels sont les nombres complexes ayant au moins un antécédent par f ? Et ceux en ayant exactement un ?
6. Montrer que si $z \in i\mathbb{R}$, son image se situe sur la parabole d'équation cartésienne $x = \dfrac{y^2}{2}$.
7. On cherche désormais à expliciter l'image par f du cercle trigonométrique $\mathbb{U}$.
   (a) Soit $z = e^{i\theta}$, avec $\theta \in [0; \pi]$. Calculer le module et l'argument de $f(z)$.
   (b) Placer dans le plan complexe les points correspondant à $f(e^{i\theta})$ pour $\theta = 0$, $\theta = \dfrac{\pi}{6}$, $\theta = \dfrac{\pi}{3}$, $\theta = \dfrac{\pi}{2}$, $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$, $\theta = \dfrac{5\pi}{6}$ et $\theta = \pi$. Tracer à partir de ces points une allure de l'image du demi-cercle trigonométrique supérieur.
   (c) Montrer que l'on peut obtenir l'image du demi-cercle inférieur à partir de la précédente en effectuant une transformation géométrique simple. En déduire l'allure de $f(\mathbb{U})$.

Problème 2

On définit dans ce problème le birapport de quatre nombres complexes a, b, c et d comme le nombre $[a,b,c,d] = \dfrac{(a-b)(c-d)}{(c-b)(a-d)}$. On dira que quatre points (ou leurs affixes complexes) sont cocycliques s'ils appartiennent à un même cercle ou s'ils sont alignés.

1. À quoi correspond, géométriquement, $\arg\left(\dfrac{a-b}{c-b}\right)$? En déduire une condition simple pour que trois points soient alignés.
2. Montrer que, si a, b, c et d sont alignés, alors $[a,b,c,d] \in \mathbb{R}$.
3. Montrer que, si a, b, c et d appartiennent à un même cercle de centre $\omega(z)$ et de rayon r, $[a,b,c,d] \in \mathbb{R}$ (on pourra noter α, β, γ et δ les arguments des nombres $a-z$, $b-z$, $c-z$ et $d-z$).
4. En déduire que quatres points cocycliques A, B, C et D dans le plan vérifient $\widehat{ABC} \equiv \widehat{ADC}[\pi]$.
5. On suppose que a, b et c sont réels. Montrer que, si $[a,b,c,d] \in \mathbb{R}$, alors $d \in \mathbb{R}$.
6. On pose pour les dernières questions $f(z) = i\dfrac{1+z}{1-z}$. Montrer que $z \in \mathbb{U} \Leftrightarrow f(z) \in \mathbb{R}$.
7. Montrer que, $[f(a), f(b), f(c), f(d)] = [a,b,c,d]$ (quand cela a un sens).
8. Montrer que, si a, b et c sont des nombres complexes de module 1 (distincts de 1), et si $[a,b,c,d] \in \mathbb{R}$, alors $d \in \mathbb{U}$. que se passe-t-il si l'un des quatres nombres est égal à 1 ?

On peut en fait plus généralement démontrer que si $[a,b,c,d] \in \mathbb{R}$, les points a, b, c et d sont nécessairement cocycliques.