TD n°2 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

21 septembre 2012

Exercice 1

1. Les fonctions f_n sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}^{+*}$, et $f_n'(x) = \dfrac{(\ln x)^n}{2\sqrt{x}} + \dfrac{n}{x}\sqrt{x}(\ln x)^{n-1} = \dfrac{(\ln x)^{n-1}}{2\sqrt{x}}(2n + \ln x)$. La dérivée s'annule donc en 1 (sauf pour $n = 1$), et $f(1) = 0$; et en e^{-2n} (et $f(e^{-2n}) = e^{-n}(-2n)^n = (\frac{-2n}{e})^n$), et son signe dépend de la parité de n : si n est impair, la dérivée ne change pas de signe en 1, mais si n est pair, si. Par croissance comparée, $\lim\limits_{x \to 0^+} f_n(x) = 0$. On a par ailleurs $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$. On a donc pour n impair :

x	0	e^{-2n}	1	$+\infty$
$f(x)$				$+\infty$
	0		0	
		$(\frac{-2n}{e})^n$		

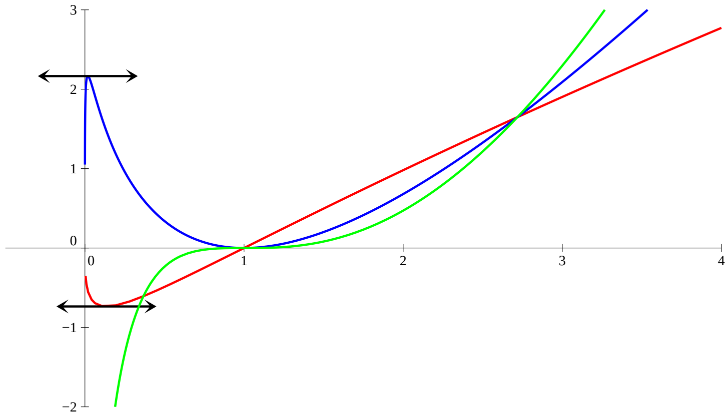
   Si n est pair, on obtient :

x	0	e^{-2n}	1	$+\infty$
$f(x)$				$+\infty$
		$(\frac{-2n}{e})^n$		
	0		0	

2. Encore un calcul peu subtil : $f_{n+1}(x) - f_n(x) = \sqrt{x}(\ln x)^n(\ln x - 1)$. Encore une fois, le signe dépend de la parité de n. Si n est impair, cette quantité est négative pour $1 \leqslant x \leqslant e$ (on a alors $\mathcal{C}_{n+1}$ en-dessous de $\mathcal{C}_n$), et positive sinon (on a alors $\mathcal{C}_{n+1}$ en-dessous de $\mathcal{C}_n$). Si n est pair, $\mathcal{C}_{n+1}$ est en-dessous de $\mathcal{C}_n$ si $x \leqslant e$, et au-dessus ensuite.

   De même, $f_{n+2}(x) - f_n(x) = \sqrt{x}(\ln x)^n(\ln^2 x - 1)$. Cette fois-ci il y a annulation en 1, e et $\dfrac{1}{e}$.
   Si n est impair, $\mathcal{C}_{n+2}$ est en-dessous de $\mathcal{C}_n$ si $x \leqslant \dfrac{1}{e}$ ou si $1 \leqslant x \leqslant e$, et au-dessus sinon ; si n est pair, $\mathcal{C}_{n+2}$ est en-dessous de $\mathcal{C}_n$ si $1 \leqslant x \leqslant e$, au-dessus sinon.
   Dans tous les cas, les courbes se coupent en deux points $(1, 0)$ et $(e, \sqrt{e})$.

3. Un peu de couleur pour aider : $\mathcal{C}_1$ en rouge, $\mathcal{C}_2$ en bleu et $\mathcal{C}_3$ en vert (on ne voit pas le minimum de cette dernière car la valeur est déjà très négative (et l'abscisse du minimum très proche de l'axe).



4. La fonction f_n est strictement croissante et continue sur $[1;+\infty[$, elle y est donc bijective vers son intervalle image $[0;+\infty[$. En particulier, elle y atteint exactement une fois la valeur 1. Notons α_n l'unique antécédent de 1 par f_n. Comme $f(1) < 1 < f(e)$, on a $1 < \alpha_n < e$ (f étant croissante, la réciproque de sa restriction à $[1:+\infty[$ l'est aussi).
5. On a vu plus haut que sur $]1;e[$, $\mathcal{C}_n$ est toujours au-dessus de $\mathcal{C}_{n+1}$, donc $f_{n+1}(\alpha_n) < f_n(\alpha_n) = 1$. On a donc $f_{n+1}(\alpha_n) < f_{n+1}(\alpha_{n+1})$, et on déduit (comme à la question précédente) que (α_n) est croissante. Soit $x < e$, on a alors $\ln x < 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (\ln x)^n = 0$, et il existe un entier n_0 pour lequel $\sqrt{x}(\ln x)^{n_0} < 1$ (puisque $\sqrt{x}$ est une constante), c'est-à-dire $f_{n_0}(x) < 1$. On a alors $x < \alpha_{n_0}$, et donc $\forall n \geqslant n_0$, $x < \alpha_n < e$. Comme ceci est vrai quelque soit $x < e$, on peut donc rendre α_n aussi proche de e qu'on le souhaite quitte à rendre n assez grand. La suite α_n a donc pour limite e.

Exercice 2

1. La fonction f est 2π-périodique et paire, puisque cos l'est. On peut donc l'étudier sur $[0;\pi]$.
2. On peut par exemple utiliser une transformation somme/produit sur les deux cosinus extrêmes, soit $\cos x + \cos(3x) = 2\cos(2x)\cos(-x)$. L'équation devient alors $\cos(2x)(1 + 2\cos x) = 0$. On a donc $2x \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$ ou $\cos x = -\frac{1}{2}$, soit $x \equiv \frac{\pi}{4}\left[\frac{\pi}{2}\right]$, $x \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]$ ou $x \equiv -\frac{2\pi}{3}[2\pi]$.

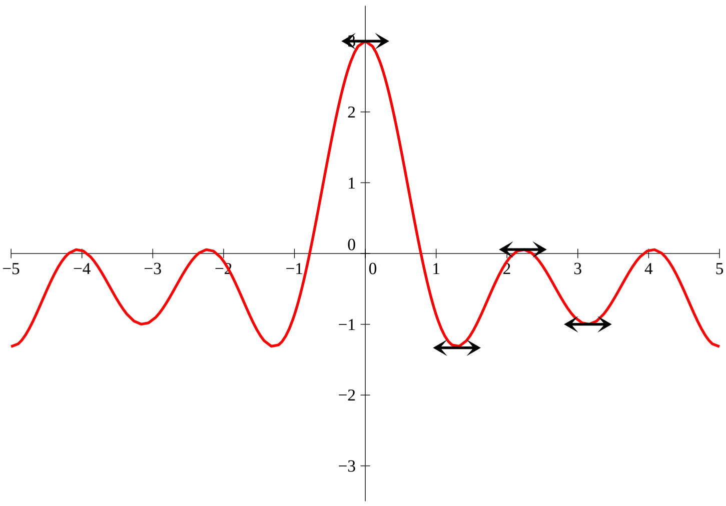
   Si on se restreint à l'intervalle d'étude, f s'annule donc en $\frac{\pi}{4}$, $\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{3\pi}{4}$. On en déduit le tableau de signes suivant :

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{2\pi}{3}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
$\cos(2x)$	1	$+$	0	$-$	-1	$-$		$-$	0	$+$	1
$2\cos x + 1$	3	$+$		$+$	1	$+$	0	$-$		$-$	-1
$f(x)$	3	$+$	0	$-$	-1	$-$	0	$+$	0	$-$	-1

3. C'est un calcul assez facile : $f'(x) = -\sin x - 2\sin(2x) - 3\sin(3x) = -\sin x - 4\sin x\cos x - 3(3\sin x - 4\sin^3 x) = -\sin x(1 + 4\cos x + 9 - 12(1 - \cos^2 x)) = -\sin x(12\cos^2 x + 4\cos x - 2)$. Pour en étudier le signe, il faut chercher le signe du trinome $12X^2 + 4X - 2 = 2(6X^2 + 2X - 1)$, qui a pour discriminant $\Delta = 4 + 24 = 28$, et donc pour racines $X_1 = \frac{-2+\sqrt{28}}{12} = \frac{-1+\sqrt{7}}{6}$ et $X_2 = \frac{-1-\sqrt{7}}{6}$. Ces deux valeurs étant comprises entre -1 et 1, ce sont les cosinus de deux angles θ_1 et θ_2 appartenant à $[0;\pi]$. Au vu du tableau de signes de f (ou d'une calcul de valeur approchée des deux cosinus), $\theta_1 \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$, et $\theta_2 \in \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}\right]$. Le facteur $-\sin x$ étant toujours négatif sur $[0,\pi]$, f' sera positive entre θ_1 et θ_2 et négative ailleurs. On a donc un tableau de variations qui ressemble à ceci :

x	0		$\frac{\pi}{4}$		θ_1		$\frac{2\pi}{3}$		θ_2		$\frac{3\pi}{4}$		π
$f'(x)$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0
$f(x)$	3	$\searrow$	0	$\searrow$	$f(\theta_1)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$f(\theta_2)$	$\searrow$	0	$\searrow$	-2

4. La courbe ressemble à ceci (on peut ajouter à l'étude que, pour $x = \frac{\pi}{2}$, f prend la valeur -1 et f' la valeur 2) :



Exercice 3

On cherche à étudier la fonction f définie par $f(x) = \arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$.

1. Il faut déjà, bien entendu, avoir $1_x^2 \geqslant 0$ pour que la racine carrée soit définie, c'est-à-dire $x \in [-1;1]$. Il faut ensuite vérifier si $2x\sqrt{1-x^2} \in [-1;1]$, domaine de définition de la fonction arcsin. Comme cela n'a rien d'évident, posons $g(x) = 2x\sqrt{1-x^2}$, et étudions la fonction g. Cette fonction est impaire, on peut donc se contenter de faire une étude sur $[0;1]$. La fonction g y admet pour dérivée (elle n'est pas dérivable en 1) $g'(x) = 2\sqrt{1-x^2} + 2x \times \frac{(-2x)}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{2(1-x^2)-2x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2-4x^2}{\sqrt{1-x^2}}$. Cette dérivée s'annule en $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, d'où le tableau de variations suivant pour g :

x	0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		1
$g(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

La valeur du maximum étant $g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\sqrt{1-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$, la fonction g prend des valeurs comprises entre -1 et 1 sur $[-1;1]$, donc $\mathcal{D}_g = [-1;1]$.

2. La fonction étant impaire comme on l'a déjà signalé, f le sera également. On peut donc restreindre à l'intervalle $[0;1]$.

3. Comme la fonction arcsin n'est pas dérivable en 1, et que g prend la valeur 1 en $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, et que par ailleurs g n'est pas dérivable en 1, f est dérivable sur $\left[0; \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right[$ et sur $\left]\dfrac{\sqrt{2}}{2}; 1\right[$. La dérivée y vaut $f'(x) = g'(x) \times \dfrac{1}{\sqrt{1 - g(x)^2}} = \dfrac{2(1-2x^2)}{\sqrt{1-x^2}} \times \dfrac{1}{\sqrt{1 - 4x^2(1-x^2)}} \dfrac{2(1-2x^2)}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{(1-2x^2)^2}}$. Le quotient $\dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}$ étant positif, f' est du signe de $\dfrac{1-2x^2}{\sqrt{(1-2x^2)^2}} = \dfrac{1-2x^2}{|1-2x^2|}$. On peut donc écrire plus simplement, $\forall x \in \left[0; \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right[$, $f'(x) = \dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}$, et $\forall x \in \left]\dfrac{\sqrt{2}}{2}; 1\right[$, $f'(x) = -\dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}$.
4. On reconnait à un facteur 2 près, les dérivées des fonctions arcsin et arccos. On a donc, $\forall x \in \left[0; \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right[$, $f(x) = 2\arcsin(x) + k$, où k est une constante qu'on va déterminer en calculant $f(0)$: $f(0) = \arcsin(0)$, donc $k = 0$, et $f(x) = 2\arcsin(x)$. Sur $\left]\dfrac{\sqrt{2}}{2}; 1\right[$, on aura $f(x) = 2\arccos(x) + k'$, avec par exemple $f(1) = \arcsin(0) = 0$, alors que $\arccos(1) = 0$, donc k' est également nulle, et $f(x) = 2\arccos(x)$. Symétriquement, les formules sont similaires sur $\left]-\dfrac{\sqrt{2}}{2}; 0\right]$ ($2\arcsin(x)$) et sur $\left[-1; \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right[$ (une légère différence ici, $2\arccos(x) - 2\pi$, due au fait que la fonction arccos n'est pas impaire).
5. Si $x = \cos(\theta)$ (ce qu'on peut toujours écrire pour un x appartenant à l'intervalle $[-1; 1]$), $2x\sqrt{1-x^2} = 2\cos(\theta)\sqrt{\sin^2(\theta)} = 2\cos(\theta)|\sin(\theta)|$. Comme on sait que $2\cos(\theta)\sin(\theta) = \sin(2\theta)$, on retrouvera bien $f(x) = 2\theta = 2\arccos(x)$ dans le cas où $\sin(\theta) \geqslant 0$ et où de plus $2\theta \in \left[\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$ (pour que $\arcsin(\sin(2\theta))$ se simplifie), c'est-à-dire pour $\theta \in \left[0; \dfrac{\pi}{4}\right]$, ce qui correspond à des valeurs de x comprises entre $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et 1 (c'est bien ce qu'on a obtenu plus haut). Sur les autres intervalles, il y de petits changements de signe et des décalages qui expliquent les formules différentes.