TD n°2 : révisions pour le DS1

PTSI B Lycée Eiffel

21 septembre 2012

Voici ce à quoi vous avez échappé pour votre premier devoir de samedi. Cela constituera donc un bon entrainement !

Exercice 1

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction f_n sur $\mathbb{R}_+^*$ par $x \mapsto \sqrt{x}(\ln x)^n$ et on note $\mathcal{C}_n$ sa courbe représentative.

1. Étudier les fonctions f_n (limites, variations).
2. Étudier le signe de $f_{n+1} - f_n$ et de $f_{n+2} - f_n$ et en déduire les points d'intersection et les positions relatives de $\mathcal{C}_n$, $\mathcal{C}_{n+1}$ et $\mathcal{C}_{n+2}$.
3. Tracer sommairement dans un même repère les courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$.
4. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f_n(x) = 1$ a une unique solution supérieure ou égale à 1, que l'on notera α_n, et que cette solution appartient à $]1; e[$.
5. Montrer que la suite (α_n) est croissante et déterminer sa limite quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 2

On s'intéresse à la fonction trigonométrique définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \cos x + \cos(2x) + \cos(3x)$$

1. Déterminer un intervalle d'étude intelligent pour f.
2. Résoudre l'équation $\cos x + \cos(2x) + \cos(3x) = 0$, en déduire le signe de f sur l'intervalle d'étude.
3. Montrer que $f'(x) = -\sin x(12\cos^2 x + 4\cos x - 2)$, en étudier le signe et en déduire les variations de f (on ne cherchera pas à calculer de valeur exacte des minima et maxima locaux).
4. Tracer une allure de la courbe de f (vous pouvez calculer quelques valeurs simples d'images et de nombres dérivés pour compléter l'étude).

Exercice 3

On cherche à étudier la fonction f définie par $f(x) = \arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$.

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction f.
2. Étudier la parité de f. En déduire un intervalle d'étude le plus restreint possible pour f.
3. Sur quel ensemble la fonction f est-elle dérivable ? Calculer la dérivée de f.
4. En déduire une expression simplifiée de la fonction f (on pourra distinguer plusieurs intervalles).
5. En posant $x = \cos(\theta)$, retrouver directement l'expression de f.