TD n°1 : fonctions

PTSI B Lycée Eiffel

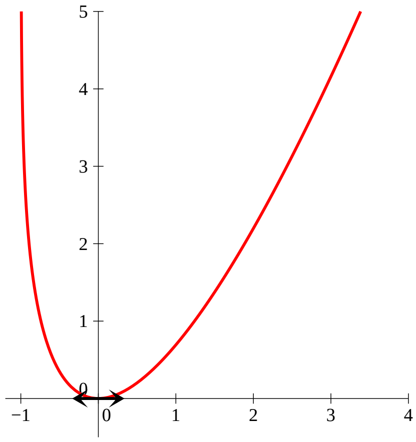
7 septembre 2012

Exercice 1

- La fonction f est définie, continue et dérivable sur l'intervalle $]-1;+\infty[$. Elle a pour limite $+\infty$ en -1 (produit d'un terme tendant vers -1 par un terme tendant vers $-\infty$) et $+\infty$ en $+\infty$ (pas de forme indéterminée). De plus, sa dérivée est donnée par $f'(x) = \ln(x+1) + \dfrac{x}{x+1}$. Étudier le signe d'une somme de ce genre n'est a priori pas du tout évident, mais on est ici sauvés par une intéressante coïncidence : le terme $\ln(x+1)$ change de signe pour $x = 0$ (c'est négatif avant, positif après) et $\dfrac{x}{x+1}$ également. Du coup, quand $x < 0$, on a une somme de deux termes négatifs, et la dérivée est donc négative sur $]-1;0]$. Par contre, tout est positif si $x > 0$, et la dérivée est donc positive sur $[0;+\infty[$. Comme $f(0) = 0$, on peut dresser le tableau de variations suivant :

x	-1	0	$+\infty$
f	$+\infty$ $\searrow$	0	$\nearrow$ $+\infty$

Ne reste plus qu'à tracer une jolie courbe :

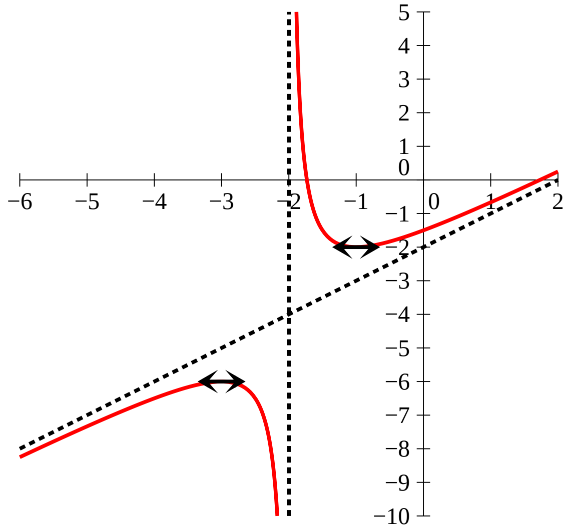


- La fonction g est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$. Comme le numérateur tend vers 1 en -2, on obtient sans difficulté $\lim\limits_{x\to -2^-} g(x) = -\infty$, et $\lim\limits_{x\to -2^+} g(x) = +\infty$, d'où la présence d'une asymptote verticale. Du côté des infinis, on peut faire un calcul commun, en utilisant la règle du quotient des termes de plus haut degré : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{x} = +\infty$ (et symétriquement en $-\infty$). Les plus courageux réussiront à diagnostiquer la présence d'une asymptote oblique : $\dfrac{x^2-3}{x+2} = \dfrac{x^2-4+1}{x+2} = \dfrac{(x-2)(x+2)+1}{x+2} = x - 2 + \dfrac{1}{x+2}$. Le terme $\dfrac{1}{x+2}$ ayant une limite nulle en $+\infty$ et en $-\infty$, on peut conclure à la présence d'une asymptote oblique d'équation $y = x - 2$

des deux côtés.
La fonction est évidemment dérivable sur son domaine de définition, de dérivée $g'(x) = \dfrac{2x(x+2)-(x^2-3)}{(x+2)^2} = \dfrac{x^2+4x+3}{(x+2)^2}$. Elle est du signe de x^2+4x+3, trinôme dont le discriminant vaut $\Delta = 16-12 = 4$, et qui admet donc deux racines $x_1 = \dfrac{-4+2}{2} = -1$, et $x_2 = \dfrac{-4-2}{2} = -3$. Pour compléter le tableau de variations, on calcule les valeurs de $f(-3) = -6$ et $f(-1) = -2$. On peut aussi constater que $f(x) = 0$ pour $x = \pm\sqrt{3}$, et que $f(0) = -\dfrac{3}{2}$ si on le souhaite.

x	$-\infty$		-3		-2		-1		$+\infty$
g	$-\infty$	$\nearrow$	-6	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

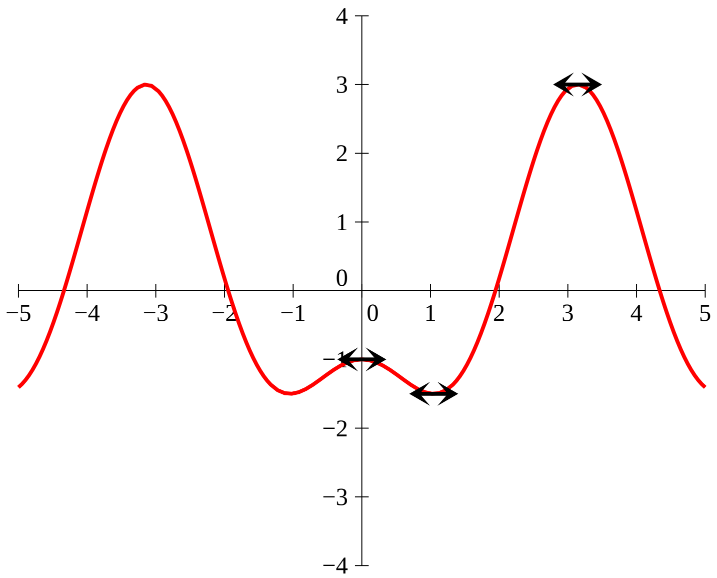
On indique bien évidemment les asymptotes sur la courbe :



- La fonction h est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Comme pour toute fonction trigonométrique, on cherche à voir si la fonction n'est pas périodique. Elle l'est, de période 2π, puisque $h(x+2\pi) = \cos(2x+4\pi) - 2\cos(x+2\pi) = \cos(2x) - 2\cos(x)$. Elle est de plus paire, puisque la fonction cos est elle-même paire. On peut donc se contenter d'étudier h sur l'intervalle $[0;\pi]$, et de compléter la courbe ensuite. Sa dérivée est donnée par $h'(x) = -2\sin(2x) + 2\sin(x) = 2(\sin(x) - 2\sin(x)\cos(x)) = 2\sin(x)(1-2\cos(x))$. Sur $[0;\pi]$, le sinus est toujours positif, reste à déterminer le signe de $1-2\cos(x)$. Cette expression est positive lorsque $\cos(x) \leqslant \dfrac{1}{2}$, ce qui, sur l'intervalle $[0\pi]$, se produit sur $\left[\dfrac{\pi}{3};\pi\right]$. La dérivée change donc de signe en $\dfrac{\pi}{3}$, qui est un minimum local de la fonction de valeur $h\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) - 2\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = -\dfrac{1}{2} - 1 = -\dfrac{3}{2}$. On peut également calculer $f(0) = 0$ et $f(\pi) = 1-(-2) = 3$ pour compléter le tableau de variations de h :

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
h	0	$\searrow$	$-\frac{3}{2}$	$\nearrow$	3

En complétant par symétrie par rapport à (Oy) (il y a donc un maximum local en 0), et pas invariance par translation de vecteur $2\pi\overrightarrow{i}$, on obtient une courbe ressemblant à ceci :



Exercice 2

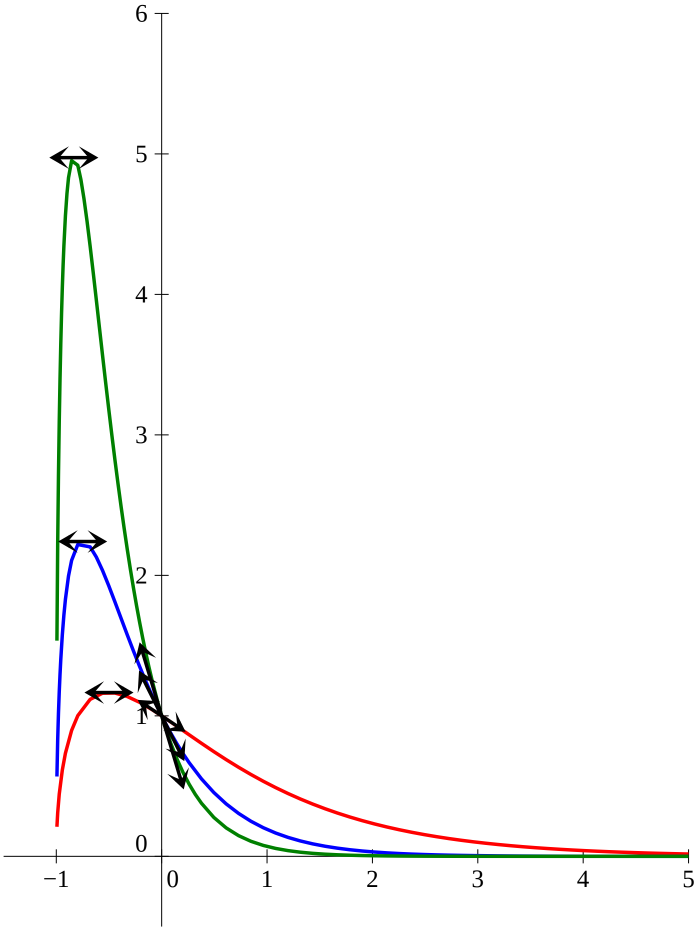
1. Au vu de l'énoncé, $f_1(x) = \sqrt{x+1}e^{-x}$, la fonction est dérivable sur $]-1;+\infty[$, de dérivée $f_1'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}e^{-x} - \sqrt{x+1}e^{-x} = \dfrac{1-2(x+1)}{2\sqrt{x+1}}e^{-x} = \dfrac{-1-2x}{2\sqrt{x+1}}e^{-x}$. Cette dérivée est du signe de $-2x-1$, et s'annule donc pour $x = -\dfrac{1}{2}$, valeur pour laquelle la fonction admet un maximum égal à $\sqrt{\dfrac{1}{2}}e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\dfrac{e}{2}}$. Par ailleurs, $f_1(-1) = 0$, et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = 0$ (il y a une forme indéterminée, mais l'exponentielle l'emporte sur la racine carrée). D'où le tableau de variations suivant :

x	-1		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
f_1	0	$\nearrow$	$\sqrt{\frac{e}{2}}$	$\searrow$	0

2. C'est le même calcul que ci-dessus : $f_n'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}e^{-nx} - n\sqrt{n+1}e^{-nx} = \dfrac{1-2n(x+1)}{2\sqrt{n+1}}e^{-nx}$. Cette dérivée est du signe de $1-2n(x+1)$, équation de droite s'annulant quand $x+1 = \dfrac{1}{2n}$, soit $x = \dfrac{1}{2n} - 1$. La fonction y admet bien un maximum (la dérivée est positive avant et négative après), de valeur $f_n\left(\dfrac{1}{2n} - 1\right) = \sqrt{\dfrac{1}{2n}}e^{-\frac{1}{2}+n} = \dfrac{e^n}{\sqrt{2ne}}$. Lorsque n tend vers $+\infty$, $\dfrac{1}{2n} - 1$ a pour limite -1, et la valeur du maximum tend vers $+\infty$ (encore une fois, l'exponentielle l'emporte). Autrement dit, le maximum se situe de plus en plus près de -1, et de plus en plus haut.
3. En -1, le numérateur de la dérivée a pour limite e^n, et le dénominateur tend vers 0, donc $\lim\limits_{x\to-1} f_n'(x) = +\infty$. Les courbes $\mathcal{C}_n$ auront toutes une tangente verticale en -1.
4. Toutes les courbes passent bien sûr par le point $(-1;0)$, mais aussi par le point $(0;1)$. De plus, par croissance comparée, toutes les fonctions ont une limite nulle en $+\infty$, donc toutes les

courbes admettent l'axe des abscisses pour asymptote horizontale.

5. On a déjà vu à la question précédente qu'on a toujours $f_n(0) = 1$. De plus, $f_n'(0) = \dfrac{1-2n}{2} = \dfrac{1}{2} - n$. La tangente en 0 a donc pour équation $y = \left(\dfrac{1}{2} - n\right) x + 1$ (la pente de la tangente est de plus en plus négative).
6. $f_{n+1}(x) - f_n(x) = \sqrt{n+1}e^{-(n+1)x} - \sqrt{x+1}e^{-nx} = \sqrt{x+1}e^{-nx}(e^{-x} - 1)$. Cette différence est du signe de $e^{-x} - 1$, qui s'annule en 0, est positive entre -1 et 0 et négative ensuite. La courbe $\mathcal{C}_{n+1}$ est donc au-dessus de $\mathcal{C}_n$ sur $[-1; 0]$ et en-dessous sur $[0; +\infty[$.
7. Voici les courbes, $\mathcal{C}_\infty$ en rouge, $\mathcal{C}_2$ en bleu et $\mathcal{C}_3$ en vert, ainsi que les tangentes en 0 :



Exercice 3

1. Commençons par rappeler que $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}_+^*$ et calculons les limites aux bornes de ce domaine de définition. On a $\lim\limits_{x \to 0^+} (2x+1)\ln(x) = -\infty$ (pas de forme indéterminée ici) donc $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$. En $+\infty$, on peut factoriser par x : $f(x) = x\left(1 + \dfrac{1}{x} - 2\ln(x) - \dfrac{\ln(x)}{x}\right)$. La parenthèse a pour limite $-\infty$ (le seul terme ayant une limite infinie est $-2\ln(x)$, rappelons que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$), donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

   Passons à l'étude des variations : $f'(x) = 1 - 2\ln(x) - 2 - \dfrac{1}{x} = -1 - 2\ln(x) - \dfrac{1}{x}$, dont le signe n'a rien d'évident. Dérivons donc une deuxième fois : $f''(x) = -\dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{1-2x}{x^2}$. On obtient alors le tableau suivant :

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$\nearrow$	$2\ln 2 - 3 < 0$	$\searrow$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$		$\searrow$	$-\infty$

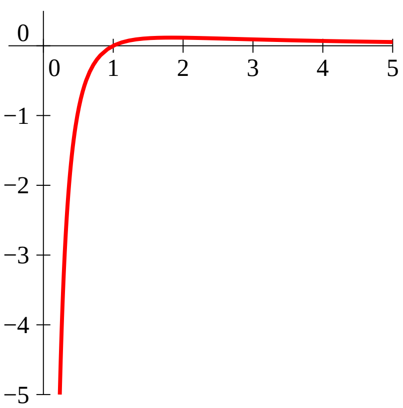
La fonction étant strictement décroissante et prenant des valeurs des deux signes, elle s'annule exactement une fois. Pour obtenir une valeur approchée (grossière) de α, calculons quelques valeurs : $f(1) = 2$; $f(2) = 3 - 5\ln 2 \simeq -0.5$, donc α est légèrement inférieur à 2. Si on tient à obtenir une meilleure approximation, on peut procéder par dichotomie (ou plus simplement par balayage) en s'aidant d'une calculatrice.

2. Calculons donc la dérivée de g : $g'(x) = \dfrac{x+1+(2x+1)\ln(x)}{(x^2+x)^2} = \dfrac{f(x)}{(x^2+1)^2}$. De plus, on a $g(\alpha) = \dfrac{\ln(\alpha)}{\alpha^2+\alpha} = \dfrac{\alpha+1}{(2\alpha+1)(\alpha^2+\alpha)} = \dfrac{1}{\alpha(2\alpha+1)}$ puisque, α étant la valeur d'annulation de f, on a $\ln(\alpha) = \dfrac{\alpha+1}{2\alpha+1}$. Remarquons qu'en prenant $\alpha \simeq 2$, on obtient $g(\alpha) \simeq \dfrac{1}{10}$. Le tableau de variations de g est donc

x	0		α		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\dfrac{1}{\alpha(2\alpha+1)}$	$\searrow$	0

(les limites seront calculées à la question suivante).

3. Sans difficulté, $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = -\infty$ et comme pour $x \geqslant 1$, $0 \geqslant g(x) \geqslant \dfrac{\ln(x)}{x}$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$. Quand à l'équation de la tangente au point d'abscisse 1, comme $g(1) = 0$ et $g'(1) = \dfrac{f(1)}{4} = \dfrac{1}{2}$, elle est $y = \dfrac{1}{2}(x-1) = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2}$. On obtient l'allure suivante pour la fonction :



4. C'est en fait tout simple, on a déjà remarqué que, si $x \geqslant 1$, $g(x) \leqslant \dfrac{\ln(x)}{x^2}$, donc $\displaystyle\int_1^\lambda g(x)\ dx \leqslant \int_1^\lambda \frac{\ln(x)}{x^2}\ dx$ (attention tout de même, il est important d'avoir $\lambda \geqslant 1$ pour que l'inégalité soit valable sur l'intervalle d'intégration).

5. On va effectuer une intégration par parties : en posant $u(x) = \ln(x)$ et $v'(x) = \dfrac{1}{x^2}$, on a $u'(x) = \dfrac{1}{x}$ et $v(x) = -\dfrac{1}{x}$, donc $\displaystyle\int_1^\lambda \frac{\ln(x)}{x^2}\ dx = \left[-\frac{\ln(x)}{x}\right]_1^\lambda + \int_1^\lambda \frac{1}{x^2}\ dx = -\frac{\ln(\lambda)}{\lambda} + \left[-\frac{1}{x}\right]_1^\lambda = \frac{-\ln(\lambda)}{\lambda} + 1 - \frac{1}{\lambda} \leqslant 1$. L'aire sous la courbe à droite de l'abscisse 1 est donc plus petite que 1.