TD n°14 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

14 juin 2013

J'ai repris le sujet sans le retaper, mais je vais tout de même vous gratifier d'un corrigé maison (je vais même tenter de faire un corrigé complètement rigoureux au niveau de la rédaction). Ce sujet est vraiment un excellent sujet de révision, balayant quasiment tout le programme avec beaucoup de questions classiques, pas extrêmement techniques mais demandant des calculs précis. Il est par contre d'une longueur vraiment exagérée, le finir en quatre heures relèverait de l'exploit, prenez donc votre temps pour tout faire correctement.

Problème 1

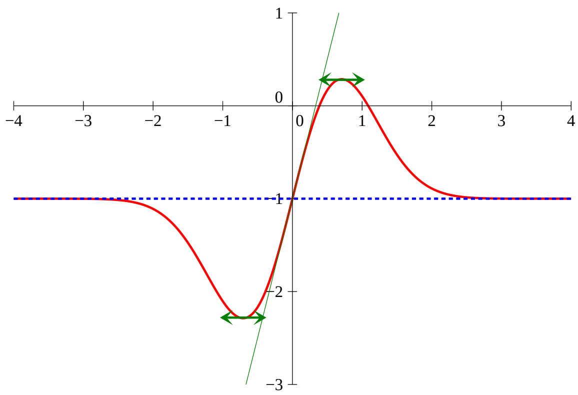
I Étude d'une fonction.

1. La fonction f est bien sûr de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ en tant que produit et composée de fonction usuelles. Sa dérivée est donnée par $f'(x) = 3e^{-x^2} - 6x^2e^{-x^2} = 3(1-2x^2)e^{-x^2}$. L'exponentielle étant toujours positive, la dérivée est du signe de $1-2x^2$, qui s'annule en $\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, et sera positive entre les deux racines. La fonction f est donc décroissante sur $\left]-\infty, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right]$ et sur $\left[\dfrac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right[$, et croissante sur $\left[-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right]$. Pour compléter le tableau de variations, calculons $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{3}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}} - 1 = \dfrac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{e}} - 1 \simeq \dfrac{3}{2} \times 1,41 \times 0,61 - 1 \simeq 0,28$ en utilisant les valeurs données dans l'énoncé. De même, $f\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\dfrac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{e}} - 1 \simeq -2,28$. Passons aux branches infinies : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} e^{-x^2} = 0$, et par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} 3xe^{-x^2} = 0$. On en déduit que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = -1$, la courbe admet donc des deux côtés une asymptote horizontale d'équation $y=-1$. On peut résumer toutes ces informations dans le tableau suivant :

x	$-\infty$	$-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	$+\infty$
f	-1	$-2,28$	$0,28$	-1

2. On a déjà précisé que f était deux fois dérivable, et $f''(x) = -6xe^{-x^2} - 12xe^{-x^2} + 12x^3e^{-x^2} = 6x(2x^2-3)e^{-x^2}$. Cette dérivée seconde s'annule en 0 et change de signe puisque $2x^2-3$ reste négatif au voisinage de 0. On en déduit la présence d'un point d'inflexion en 0.

3. Puisque $f(0) = -1$ et $f'(0) = 3$, l'équation de la tangente en 0 est $y = 3x - 1$. Pour étudier la position relative de la courbe et de la tangente, on cherche le signe de $f(x) - (3x - 1) = 3xe^{-x^2} - 3x = 3x(e^{-x^2} - 1)$. Comme $-x^2$ est toujours un réel négatif, $e^{-x^2} - 1 \leqslant 0$, notre expression est donc du signe opposé à celui de x. Autrement dit, la courbe est au-dessus de la tangente sur $\mathbb{R}^-$, et en-dessous sur $\mathbb{R}^+$. Elle traverse sa tangente en 0, ce qui confirme la présence d'un point d'inflexion.
4. On peut bien sûr tracer la tangente en 0 sur le même graphique que la courbe :



5. (a) La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, elle admet donc des développements limités à tout ordre (par exemple en appliquant la formule de Taylor-Young).

   (b) Par une composition facile, $e^{-x^2} = 1 - x^2 + \dfrac{1}{2}x^4 + o(x^5)$, donc $f(x) = 3xe^{-x^2} - 1 = -1 + 3x - 3x^3 + \dfrac{3}{2}x^5 + o(x^6)$. Notons que ce qu'on obtient est tout à fait cohérent avec les résultats de la question 3.

II Étude d'une équation différentielle.

6. L'équation homogène normalisée s'écrit sous la forme $y' - \dfrac{n - 2x^2}{x}y = 0$, on ne peut effectivement la résoudre que sur $\mathbb{R}^{+*}$ et sur $\mathbb{R}^{-*}$. Commençons par résoudre sur $\mathbb{R}^{+*}$, il s'agit de déterminer une primitive de la fonction $a : x \mapsto \dfrac{n}{x} - 2x$, on peut prendre $A : x \mapsto n\ln(x) - x^2$, les solutions de l'équation (H_n) sont alors les fonctions de la forme $x \mapsto Ke^{n\ln(x) - x^2} = Kx^n e^{-x^2}$, avec $K \in \mathbb{R}$. De même, sur $\mathbb{R}^{-*}$, on cherche une primitive de a, qui va cette fois s'écrire sous la forme $x \mapsto n\ln(-x) - x^2$, les solutions sur $\mathbb{R}^{-*}$ sont donc de la forme $x \mapsto L(-x)^n e^{-x^2}$, avec $L \in \mathbb{R}$.
7. Il suffit maintenant de déterminer une solution particulière de l'équation complète. Pas besoin de beaucoup se fatiguer, la constante -1 est solution triviale. Les solutions sur $\mathbb{R}^{+*}$ sont donc les fonctions $y : x \mapsto Kx^x e^{-x^2} - 1$, et sur $\mathbb{R}^{-*}$ elles sont de la forme $y : x \mapsto L(-x)^n e^{-x^2}$. Petite parenthèse : dans ce genre de problème avec plusieurs parties aux liens pas toujours évidents, il est rassurant de trouver des solutions qui ont une allure proche de la fonction f étudiée dans la première partie.
8. Les solutions définies sur $\mathbb{R}^{+*}$ et sur $\mathbb{R}^{-*}$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur leur intervalle de définition. Pour construire des fonctions solutions sur $\mathbb{R}$, il faut réussir à prolonger nos solutions en 0, et à les rendre dérivables en 0. Commençons par constater que $\lim\limits_{x \to 0^+} Kx^n e^{-x^2} - 1 = \lim\limits_{x \to 0^-} L(-x)^n e^{-x^2} - 1 = -1$, et ce quelle que soit la valeur de l'entier n. Le recollement de deux fonctions sera donc toujours continue en 0, en ajoutant évidemment la valeur $y(0) = -1$. De plus, si $x > 0$, on pourra écrire $\dfrac{y(x) - y(0)}{x - 0} = Kx^{n-1}e^{-x^2}$, qui admet toujours une limite en 0^+. Plus précisément,

y sera donc dérivable à droite en 0, et $y'(0^+) = 0$ si $n \geqslant 2$, $y'(0^+) = K$ si $n = 1$. De même, les solutions définies sur $\mathbb{R}^{-*}$ sont dérivables en 0^-, avec une dérivée nulle si $n \geqslant 2$, et égale à $-L$ si $n = 1$ (ne pas oublier le $-x$ qui divisé par x laisse tout de même un signe $-$ devant l'exponentielle). Conclusion : dans le cas où $n \geqslant 2$, toutes les fonctions définies par $\begin{cases} y(x) = Kx^n e^{-x^2} \text{ si } x \geqslant 0 \\ y(x) = L(-x)^n e^{-x^2} \text{ si } x < 0 \end{cases}$ sont des solutions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Par contre, si $n = 1$, la condition $-L = K$ est indispensable pour que la fonction soit dérivable en 0, ce qui implique que $\forall x < 0$, $y(x) = (-K) \times (-x)e^{-x^2} - 1 = Kxe^{-x^2} - 1$. Autrement dit, les fonctions solutions sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sont simplement de la forme $x \mapsto Kxe^{-x^2} - 1$, avec $K \in \mathbb{R}$ (et ces solutions sont effectivement clairement de classe $\mathcal{C}^1$).

III Étude de deux suites.

9. Calculons donc : $f_n(0) = -1$ est clairement négatif, et $f_n(1) = \dfrac{3}{e} - 1 > 0$ puisque $e < 3$ (on devrait tous savoir que $e \simeq 2.7$).
10. La fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et $f_n'(x) = 3nx^{n-1}e^{-x^2} - 6x^{n+1}e^{-x^2} = 3(n-2x^2)x^{n-1}e^{-x^2}$. Sur $\mathbb{R}^+$, cette dérivée est du signe de $n - 2x^2$, elle s'annule en $\sqrt{\frac{n}{2}}$, et f_n est croissante sur $\left[0, \sqrt{\dfrac{n}{2}}\right]$ et décroissante ensuite. Par ailleurs, $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = -1$ par croissance comparée. La fonction f_n étant continue, elle est donc bijective sur l'intervalle $\left[0, \sqrt{\dfrac{n}{2}}\right]$, avec $f_n(0) < 0$ et $f_n\left(\sqrt{\dfrac{n}{2}}\right) \geqslant f_n(1) > 0$. D'après le théorème de la bijection, f_n s'annule donc une unique fois entre 0 et $\sqrt{\dfrac{n}{2}}$. Comme de plus $f_n(1) > 0$, la valeur d'annulation est comprise entre 0 et 1. De même, f_n est bijective sur $\left[\sqrt{\dfrac{n}{2}}, +\infty\right[$, à valeurs dans $]-1, \alpha]$, avec $\alpha > 0$, ce qui suffit à prouver l'existence et l'unicité d'une deuxième valeur d'annulation pour f_n.
11. On sait bien sûr que $v_n > 1$, mais surtout que $v_n > \sqrt{\dfrac{n}{2}}$, ce qui est beaucoup plus intéressant ! Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{\dfrac{n}{2}} = +\infty$, on en déduit immédiatement que $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.
12. (a) Par hypothèse, $f_n(u_n) = 0$, c'est-à-dire $3u_n^n e^{-u_n^2} = 1$. On en déduit immédiatement que $e^{-u_n^2} = \dfrac{1}{3u_n^n}$.
    (b) Calculons donc $f_{n+1}(u_n) = 3u_n^{n+1}e^{-u_n^2} - 1 = \dfrac{3u_n^{n+1}}{3u_n^n} - 1 = u_n - 1$ en exploitant le résultat de la question précédente. Comme on sait que $u_n < 1$, $f_{n+1}(u_n) < 0$.
    (c) Puisque $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0$ (par définition), le résultat de la question précédente prouve que $f_{n+1}(u_n) < f_{n+1}(u_{n+1})$. La fonction f_{n+1} étant strictement croissante sur l'intervalle $[0, 1]$ auquel appartiennent les deux réels u_n et u_{n+1}, on en déduit que $u_n < u_{n+1}$. La suite (u_n) est donc strictement croissante.
    (d) Étant croissante et majorée par 1, la suite (u_n) converge d'après le théorème de convergence monotone.
13. (a) Avec l'hypothèse $t > 0$, l'équation est équivalente à celle obtenue en passant tout à l'exponentielle, c'est-à-dire $3t^n e^{-t^2} = 1$, ce qui correspond bien à $f_n(t) = 0$.
    (b) Si $l \neq 1$, donc nécessairement $l < 1$ puisque la suite est majorée par 1, on pourra certainement écrire que $\lim\limits_{n \to +\infty} n\ln(u_n) = -\infty$, et $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln(3) - n\ln(u_n) - u_n^2 = -\infty$. C'est

très contradictoire avec le fait que cette quantité est censée être toujours nulle (puisque $g_n(u_n) = f_n(u_n) = 0$). La limite de la suite (u_n) est donc nécessairement égale à 1.

(c) D'après la question précédente, $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$, ce qui permet d'utiliser les développements limités classiques en 0. Écrivons alors $g_n(u_n) = g_n(1+w_n) = \ln(3) + n\ln(1+w_n) - (1+w_n)^2 = \ln(3) + nw_n - \frac{n}{2}w_n^2 - 1 - 2w_n - w_n^2 + o(w_n^2) = \ln(3) - 1 + (n-2)w_n + o(w_n)$. Puisqu'on sait que $g_n(u_n) = 0$, on en déduit que $(n-2)w_n \sim 1 - \ln(3)$, soit $w_n \sim \frac{1-\ln(3)}{n-2} \sim \frac{1-\ln(3)}{n}$. Notons que cela permet d'obtenir un début de développement asymptotique pour la suite (u_n) : $u_n = 1 + \frac{1-\ln(3)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$. Le terme $\frac{1-\ln(3)}{n}$ est négatif, ce qui est cohérent avec le fait que $u_n < 1$.

IV Étude d'une courbe paramétrée.

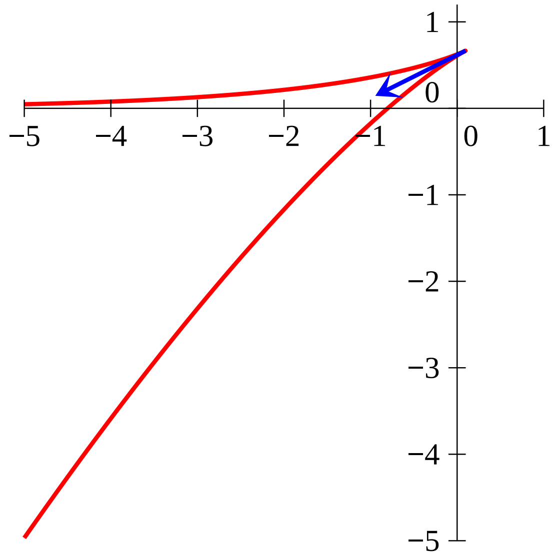
14. (a) Les deux fonctions sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, et $x'(t) = \frac{2}{t} - 2t = \frac{2(1-t^2)}{t}$, elle s'annule donc pour $t = 1$. De plus, $y'(t) = 1 - t^2$ s'annule également pour $t = 1$. On calcule sans difficulté $x(1) = \ln(3) - 1 \simeq 0,1$; $y(1) = \frac{2}{3}$; $\lim\limits_{t\to 0^+} x(t) = -\infty$; $\lim\limits_{t\to 0^+} y(t) = 0$; $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = -\infty$ (par croissance comparée) et $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = -\infty$. D'où le tableau de variations suivant :

t	0		1		$+\infty$
$x'(t)$		$+$	0	$-$	
x	$-\infty$	$\nearrow$	$\ln(3)-1$	$\searrow$	$-\infty$
$y'(t)$		$+$	0	$-$	
y	0	$\nearrow$	$\frac{2}{3}$	$\searrow$	$-\infty$

(b) Les calculs de limites en 0 prouvent que l'axe des abscisses est asymptote à la courbe en 0. En $+\infty$, les deux fonctions coordonnées ont des limites infinies, mais comme $x(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} -t^2$ et $y(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{3}t^3$, on peut écrire $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = +\infty$, ce qui prouve l'existence d'une branche parabolique de direction (Oy) en $+\infty$.

(c) Le point $M(1)$ est un point stationnaire. Inutile de s'embêter avec des développements limités pour déterminer sa nature, les dérivées sont ici très faciles à obtenir : $x''(t) = -\frac{2}{t^2} - 2$ et $y''(t) = -2t$, donc $\overrightarrow{f''(1)} = (-4, -2)$ est non nul, ce vecteur dirigera la tangente au point $M(1)$. Ensuite, $x'''(t) = \frac{4}{t^3}$ et $y'''(t) = -2$, donc $\overrightarrow{f'''(t)} = (4, -2)$ n'est pas colinéaire au vecteur tangent, on est en présence d'un point de rebroussement de première espèce.

15. Rien de spécial à signaler de plus sur la courbe :



Problème 2

I Étude d'un polynôme.

16. (a) Cherchons directement les racines sous formes algébrique : soit $z = a + ib$ tel que $z^2 = -3 + 4i$. en séparant partie réelle et imaginaire, on obtient les deux premières équations $a^2 - b^2 = -3$ et $2ab = 4$ (les deux réels a et b sont donc de même signe). De plus, la condition d'égalité de module permet de trouver $a^2 + b^2 = \| -3 + 4i\| = \sqrt{9 + 16} = 5$. En additionnant la première et la troisième équation obtenues, $2a^2 = 2$, soit $a = \pm 1$. En les soustrayant, $2b^2 = 8$, soit $b = \pm 2$. Puisque a et b doivent être de même signe, les deux racines carrées recherchées sont $z_1 = 1 + 2i$ et $z_2 = -1 - 2i$.

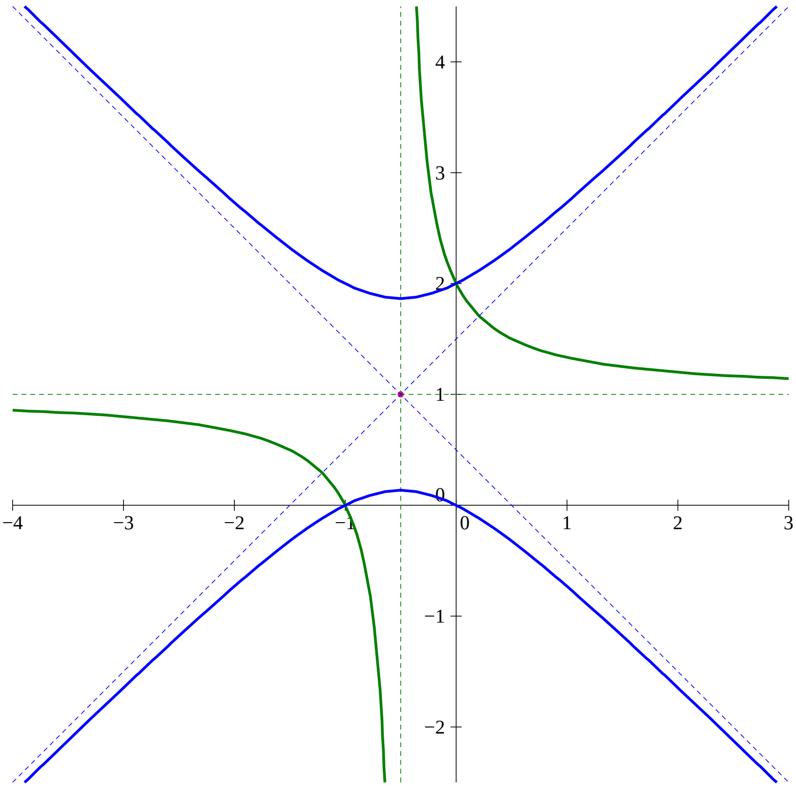
    (b) Le polynôme U a pour discriminant $\Delta = (1 - 2i)^2 + 8i = 1 - 4i - 4 + 8i = -3 + 4i$. Quelle surprise, les calculs de la question précédente vont nous resservir, les racines de U sont $r_1 = \dfrac{-1 + 2i + 1 + 2i}{2} = 2i$ et $r_2 = \dfrac{-1 + 2i - 1 - 2i}{2} = -1$. Bien sûr, on aurait pu remarquer tout de suite que -1 était racine évidente du polynôme U.

17. (a) Allons-y : $U(z) = (x+iy)^2 + (1-2i)(x+iy) - 2i = x^2 - y^2 + 2ixy + x + iy - 2ix + 2y - 2i = x^2 - y^2 + x + 2y + i(2xy - 2x + y - 2)$. La partie réelle de $U(z)$ est donc égale à $x^2 - y^2 + x + 2y$ et la partie imaginaire vaut $2xy - 2x + y - 2$.

    (b) i. L'ensemble Γ_1 est défini par l'équation $x^2 - y^2 + x + 2y = 0$, soit $\left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{4} - (y - 1)^2 + 1 = 0$, donc $(y-1)^2 - \left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{3}{4}$. On reconnait l'équation d'une hyperbole de centre $\Omega_1 = \left(-\dfrac{1}{2}, 1\right)$. Dans le repère $(\Omega_1, \vec{i}, \vec{j})$, l'équation de l'hyperbole devient $y'^2 - x'^2 = \dfrac{3}{4}$, soit $\left(\dfrac{2x'}{\sqrt{3}}\right)^2 - \left(\dfrac{2x'}{\sqrt{3}}\right)^2 = 1$. Les paramètres de l'hyperbole sont donc $a = b = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$, ce qui donne une excentricité $e = \dfrac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\dfrac{4}{3} + \dfrac{4}{3}} = \sqrt{2}$.

Pour le tracé de la courbe (qu'on donnera à la question suivante, puisque les deux courbes sont demandées en même temps), on peut ajouter que les deux asymptotes de l'hyperbole sont les deux bissectrices du repère $(\Omega_1, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ puisque $\dfrac{b}{a} = 1$. Attention aussi au fait que l'axe de l'hyperbole sera ici l'axe des ordonnées (dans le repère décalé) et non l'axe des abscisses.

ii. L'ensemble Γ_2 est défini par l'équation $2xy - 2x + y - 2 = 0$, il faut effectuer une rotation d'angle $\dfrac{\pi}{4}$ pour se débarasser du terme en xy. Posons donc $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(X - Y)$ et $y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(X' + Y')$ pour obtenir la nouvelle équation $(X - Y)(X + Y) - \sqrt{2}(X - Y) + \dfrac{\sqrt{2}}{2}(X + Y) - 2 = 0$, soit $X^2 - Y^2 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}X + \dfrac{3\sqrt{2}}{2}Y - 2 = 0$. On met sous forme canonique : $\left(X - \dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 - \dfrac{1}{8} - \left(Y - \dfrac{3\sqrt{2}}{4}\right)^2 + \dfrac{9}{8} - 2 = 0$, soit $x'^2 - y'^2 = 1$ dans un repère dont le centre a pour coordonnées $X = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$ et $Y = \dfrac{3\sqrt{2}}{4}$, soit $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \times \dfrac{-\sqrt{2}}{2} = -\dfrac{1}{2}$ et $y = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{2} = 1$. Autrement dit, le centre de Γ_2 est Ω_1, c'est le même que celui de Γ_1. Par ailleurs, notre deuxième hyperbole a la même excentricité que la première puisqu'on a obtenu la même équation réduite après changement de repère. Les asymptotes sont les bissectrices dans le repère décalé et tourné de $\dfrac{\pi}{4}$, donc les droites horizontale et verticale passant par Ω_1 dans le repère d'origine. Ici, l'axe de l'hyperbole est l'axe des abscisses du repère tourné, c'est-à-dire la première bissectrice du repère $(\Omega_1, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Allez, une belle figure pour illustrer tout ça (Γ_1 en vert et Γ_2 en bleu, avec les asymptotes en pointillés) :



II Définition d'une application.

18. Considérons deux polynômes P_1 et P_2 appartenant à $\mathbb{C}[X]$, par définition, $P_1(X^2) = Q_1(X)T(X) + R_1(X)$ et $P_2(X^2) = Q_2(X)T(X) + R_2(X)$, avec $f(P_1) = Q_1(X) + XR_1(X)$ et $f(P_2) = Q_2(X) + XR_2(X)$. Si λ et μ sont deux constantes complexes quelconques, alors $(\lambda P_1 + \mu P_2)(X^2) = \lambda P_1(X^2) + \mu P_2(X^2) = (\lambda Q_1(X) + \mu Q_2(X))T(X) + (\lambda R_1(X) + \mu R_2(X))$. Comme $d^\circ(\lambda R_1 + \mu R_2) \leqslant \max(d^\circ(R_1), d^\circ(R_2)) < n$, ce qu'on vient d'écrire est forcément (il y a unicité) la division euclidienne de $\lambda P_1(X^2) + \mu P_2(X^2)$ par T. Autrement dit, $f(\lambda P_1 + \mu P_2) = (\lambda Q_1(x) + \mu Q_2(X)) + X(\lambda R_1(X) + \mu R_2(X)) = \lambda f(P_1) + \mu f(P_2)$ en développant. Nous avons bien prouvé la linéarité de l'application f.
19. La restriction de f à n'importe quel sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}[X]$ est toujours linéaire. Encore faut-il que, pour un polynôme P fixé dans $\mathbb{C}_n[X]$, $f(P) \in \mathbb{C}_n[X]$. On sait déjà que $d^\circ(R) < d^\circ(T) = n$, donc $d^\circ(XR) = d^\circ(R) + 1 \leqslant n$. De plus, $P(X^2)$ est un polynôme de degré au plus égal à $2n$ (rappelons que le degré d'une composée de deux polynômes est le produit des degrés des deux polynômes), donc $P(X^2) - R(X)$ également. Autrement dit, $d^\circ(QT) \leqslant 2n$, ce qui implique $d^\circ(Q) \leqslant 2n - d^\circ(T) = n$. Le polynôme $f(P)$ est donc la somme de deux polynômes de degré inférieur ou égal à n, il appartient à $\mathbb{C}_n[X]$ et f_n est bien un endomorphisme.
20. (a) Il s'agit donc d'effectuer la division euclidienne de $P(X^2)$ par X^2 pour chacun des polynômes de la base canonique $(1, X, X^2)$. Comme $1 = O \times X^2 + 1$, $f(1) = 0 + X \times 1 = X$; comme $X^2 = 1 \times X^2 + 0$, $f(X) = 1 + X \times 0 = 1$; enfin, comme $X^4 = X^2 \times X^2 + 0$, $f(X^2) = X^2 + X \times 0 = X^2$. La matrice de f_2 dans la base canonique est donc $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

    (b) Un calcul vraiment extrêmement élémentaire donne simplement $A^2 = I$. La matrice A est donc inversible, et égale à sa propre inverse. L'application qu'elle représente dans la base canonique est donc bijective, et elle est sa propre réciproque. L'application f_2 est une symétrie vectorielle.
21. On a vu plus haut que $U(X) = (X+1)(X-2i)$ (enfin, on a seulement calculé ses racines mais comme il est unitaire, la factorisation en découle), donc $U(X^2) = (X^2+1)(X^2-2i)$. Or, $2i = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$ a pour racines carrées $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = 1+i$ et $-1-i$, donc $U(X^2) = (X-i)(X+i)(X-1-i)(X+1+i)$. Autrement dit, $U(X^2) = (X-i)(X+1+i)T(X)$, ce qui nous donne la division euclidienne de $U(X^2)$ par T. On en déduit que $f(U) = (X-i)(X+1+i) = X^2 + X + 1 - i$.

III Étude d'un cas particulier.

22. Ces calculs sont similaires à ceux effectués dans la partie précédente. Commençons par écrire $1 = 0 \times T + 1$, donc $f_3(1) = X$; puis $X^2 = 0 \times T + X^2$, donc $f_3(X) = X^3$; ensuite, $X^4 = X \times (X^3 + X^2 + a) + (-X^3 - aX) = (X-1) \times (X^3 + X^2 + a) + (-aX + X^2 + a)$, donc $f_3(X^2) = X - 1 + X \times (-aX + X^2 + a) = X^3 - aX^2 + (1+a)X - 1$; enfin, $X^6 = X^3(X^3 + X^2 + a) - X^5 - aX^3 = (X^3 - X^2)(X^3 + X^2 + a) - aX^3 + X^4 + aX^2 = (X^3 - X^2 + X)(X^3 + X^2 + a) - aX^3 + aX^2 - X^3 - aX = (X^3 - X^2 + X - a - 1)T(X) + aX^2 - aX + (a+1)X^2 + a^2 + a = (X^3 - X^2 + X - a - 1)T(X) + (2a+1)X^2 - aX + a^2 + a$ (on peut évidemment effectuer une division euclidienne de façon plus classique pour obtenir le quotient et le reste). Reste à calculer $f(X^3) = (X^3 - X^2 + X - a - 1) + X((2a+1)X^2 - aX + a^2 + a) = (2a+2)X^3 - (a+1)X^2 + (a^2+a+1)X - a - 1$. Toutes les valeurs obtenues correspondent aux coefficients de la matrice donnée dans l'énoncé.
23. On peut simplement développer le déterminant de la matrice successivement suivant les deux premières colonnes :
$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & -a-1 \\ 1 & 0 & a+1 & 1+a+a^2 \\ 0 & 0 & -a & -a-1 \\ 0 & 1 & 1 & 2a+2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & -1 & -a-1 \\ 0 & -a & -a-1 \\ 1 & 1 & 2a+2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & -a-1 \\ -a & -a-1 \end{vmatrix} = -(a+1-a^2-a) =$$

a^2-1. On peut ajouter une phrase de conclusion si on veut : $\det(f_3) = a^2 - 1$.

24. L'application est bijective si et seulement si son déterminant est non nul. Ici, ce sera le cas si $a \notin \{-1, 1\}$.

25. (a) Dans ce cas, la matrice devient $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. un polynôme $P = a + bX + cX^2 + dX^3$ appartient au noyau de f_3 si ses coefficients sont solution du système suivant : $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} & & & & -c & & & = & 0 \\ a & & & & & + & d & = & 0 \\ & & & & c & & & = & 0 \\ & & b & + & c & & & = & 0 \end{array}\right.$. Bref, on a $b = c = 0$ et $a = -d$, donc $\ker(f_3) = \{dX^3 - d \mid d \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}(X^3 - 1)$.

    (b) On calcule simplement les images des vecteurs de la base canonique : $\mathrm{Im}(f_3) = \mathrm{Vect}(X, X^3, -1 + X^2 + X^3, X) = \mathrm{Vect}(X, X^3, X^3 + X^2 - 1)$. Comme le noyau de f_3 est de dimension 1 et $\mathbb{C}_3[X]$ de dimension 4, le théorème du rang nous assure que $\mathrm{Im}(f_3)$ est de dimension 3. La famille $(X, X^3, X^3 + X^2 - 1)$ est donc une base de $\mathrm{Im}(f_3)$.

    (c) Puisque la sommes des dimensions de nos deux sous-espaces vaut 4, il suffit par exemple de vérifier si $\ker(f_3) + \mathrm{Im}(f_3)$ est égal à $\mathbb{C}_3[X]$ pour savoir s'ils sont supplémentaires. Or, $\ker(f_3) + \mathrm{Im}(f_3) = \mathrm{Vect}(X^3 - 1, X, X^3, X^3 + X^2 - 1) = \mathrm{Vect}(X^3 - 1, X, X^3, X^2) = \mathrm{Vect}(-1, X, X^3, X^2)$ en remplaçant le dernier polynôme par la différence du dernier et du premier, puis le premier par sa somme avec le troisième (opération élémentaires qui ne modifient pas l'espace vectoriel engendré). La dernière famille obtenue étant très clairement génératrice de $\mathbb{C}_3[X]$, nos deux espaces sont bel et bien supplémentaires.

IV Étude de noyau.

26. Si $2d^\circ(P) < n$, alors $d^\circ(P(X^2)) < n = d^\circ(T)$. Dans ce cas, la division euclidienne de $P(X^2)$ par T est facile à effectuer : le quotient est nul, et le reste est égal à $P(X^2)$, ce qui implique que $f(P) = P(X^2)$, qui ne peut pas être nul puisque P est supposé non nul.

27. Supposons dans un premier temps que $f(P(X)) = 0$, alors, en notant Q et R le quotient et le reste de la division euclidienne de $P(X^2)$ par T, $Q(X) + XR(X) = 0$, autrement dit $Q(X) = -XR(X)$. En reportant cette relation dans la division euclidienne, $P(X^2) = -XR(X)T(X) + R(X) = R(X)(1 - XT(X))$, avec $d^\circ(R) < n$ d'après les propriétés de la division euclidienne. Réciproquement, si $P(X^2) = R(X)(1 - XT(X))$, alors $P(X^2) = -XR(X)T(X) + R(X)$, avec par hypothèse $d^\circ(R) < n$. Nous sommes donc forcément en présence de la division euclidienne de $P(X^2)$ par T, dont le quotient Q vérifie donc $Q(X) = -XR(X)$. En découle $P \in \ker(f)$.

28. C'est un raisonnement sur le degré similaire à ceux effectués plus haut : en notant k le degré de P, l'égalité $P(X^2) = R(X)(1 - XT(X))$ implique $2k = d^\circ(R) + n + 1 \leqslant n - 1 + n + 1 = 2n$, donc $k \leqslant n$. Cela signifie bien que $P \in \mathbb{C}_n[X]$.

29. Les hypothèse impliquent que $P(X^2) = R(X)(1 - XT(X))$, donc $(X^k P)(X^2) = X^{2k} P(X^2) = X^{2k} R(X)(1 - XT(X))$. Or, $d^\circ(R) = d^\circ(P(X^2)) - d^\circ(1 - XT(X)) = 2d^\circ(P) - n - 1$, donc $d^\circ(X^{2k} R) = 2(k + d^\circ(P)) - (n + 1) \leqslant n - 1$ puisqu'il est supposé que $k + d^\circ(P) \leqslant n$. Le polynôme $X^k P$ vérifie donc exactement la caractérisation de la question 27, il appartient donc au noyau de f.

30. (a) Si le noyau n'est pas réduit à 0, il existe au moins un polynôme non nul dans le noyau, donc au moins un entier naturel k dans l'ensemble I. Tout ensemble non vide d'entiers naturels admettant un minimum, la question est résolue.

(b) Utilisons la caractérisation de la question 27 : $P_0(X^2) = R_0(X)(1-XT(X))$ et $P_1(X^2) = R_1(X)(1-XT(X))$, avec $d^\circ(R_0) = 2d-(n+1) = d^\circ(R_1)$. Si R_0 et R_1 sont de même degré k, en notant a et b leurs coefficients dominants, $R_0 - \frac{a}{b}R_1$ sera de degré strictement inférieur. Notons donc $c = \frac{b}{a}$, alors $(P_0 - cP_1)(X^2) = (R_0 - cR_1)(X)(1-XT(X))$, avec donc $d^\circ(R_0 - cR_1) < k$, ce qui implique $d^\circ(P_0 - cP_1) < 2d$, donc $d^\circ(P_0 - cP_1) < d$. Mais alors $P_0 - cP_1$ est un polynôme appartenant au noyau de f (puisque combinaison linéaire d'éléments du noyau) et de degré plus petit que d. Cela n'est possible que si ce polynôme est nul, c'est-à-dire si $P_0 = cP_1$, ou si on préfère $P_1 = \frac{1}{c}P_0$.

(c) On a vu plus haut que, $\forall k \in \{0, \dots, n-d\}$, $X^k P_0(X) \in \ker(f)$. Par linéarité, si $S(X)$ est de degré inférieur ou égal à $n-d$, il s'écrit comme combinaison linéaire des monomes X^k, donc $S(X)P_0(X)$ appartient également au noyau. Supposons maintenant réciproquement que $P \in \ker(f)$, et effectuons la division euclidienne de P par P_0, en notant S son quotient et Z son reste : $P(X) = S(X)P_0(X) + Z(X)$. Puisque $d^\circ(S) \leqslant n$, $d^\circ(S) \leqslant n-d$, donc $SP_0 \in \ker(f)$ d'après ce qui précède. Par linéarité, Z appartient alors aussi au noyau de f. Or, Z est un polynôme de degré strictement inférieur à celui de P_0. Encore une fois, ce n'est possible que si $Z = 0$, c'est-à-dire si $P = SP_0$.

31. On a calculé dans la partie précédente le noyau de la restriction de f à $\mathbb{C}_3[X]$, qui était égal à $\mathrm{Vect}(X^3-1)$. Les question précédentes prouvent que le noyau de f (sans restriction) ne peut contenir que des polynômes de degré inférieur ou égal à 3 et multiples de X^3-1 (qui est un polynôme de degré minimal dans le noyau). Autrement dit, $\ker(f) = \mathrm{Vect}(X^3-1)$, on ne peut pas multiplier ce polynôme par autre chose que des constantes sans dépasser le degré 3.

V Étude d'un produit scalaire.

32. La démonstration est rigoureusement la même que dans le cas où on travaille sur $\mathbb{C}$. La matrice dans la base canonique ne change pas non plus, la matrice recherchée est donc la matrice A calculée à la question 20.

33. L'application est clairement symétrique. Vérifions la linéarité à gauche, qui combinée avec la symétrie prouvera la bilinéarité : $< \lambda U(X) + \mu W(X), V(X) >= (\lambda U + \mu W)(1)V(1) + (\lambda U + \mu W)'(1)V'(1) + (\lambda U + \mu W)''(1)V''(1) = \lambda U(1)V(1) + \mu W(1)V(1) + \lambda U'(1)V'(1) + \mu W'(1)V'(1) + \lambda U''(1)V''(1) + \mu W''(1)V'(1) = \lambda < U(X), V(X) > +\mu < W(X), V(X) >$ en regroupant. De plus, $< U(X), U(X) >= U(1)^2 + U'(1)^2 + U''(1)^2$ est toujours positif, et ne peut s'annuler que si $U(1) = U'(1) = U''(1) = 0$. Le réel 1 est alors racine triple du polynôme U, ce qui n'est possible que si U est nul puisqu'il est supposé de degré inférieur ou égal à 2. L'application est donc définie positive en plus d'être symétrique et bilinéaire, il s'agit bien d'un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.

34. La matrice A étant symétrique, ${}^tA = A$. Comme on a par ailleurs vérifié à la question 20 que $A^2 = I$, on peut donc écrire $A^tA = I$, ce qui prouve que A est une matrice orthogonale.

35. Calculons donc $< 1, 1 >= 1 \times 1 + 0 \times 0 + 0 \times 0 = 1$, et $< g(1), g(1) >=< X, X >= 1 \times 1 + 1 \times 1 + 0 \times 0 = 2$. Ces deux produits scalaires étant distincts, l'application g ne conserve pas la norme associée à notre produit scalaire, et ne peut donc pas être une isométrie.

Eh ben voilà, on a réussi à faire tenir le corrigé en strictement moins de dix pages !