TD n°13 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

7 juin 2013

Partie A

1. On sait qu'une matrice carrée est inversible si et seulement si son déterminant est non nul. De plus, on peut alors écrire $\det(AA^{-1}) = \det(I) = 1$, donc $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$.
2. Pour éviter de résoudre un système où de refaire un pivot pour chaque matrice (ce qui ne serait pas bien long ici, ceci dit), on peut utiliser la formule $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}\,{}^t(\mathrm{Com}(A))$. Dans le cas d'une matrice d'ordre 2, si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, alors ${}^t(\mathrm{Com}(A)) = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. Par ailleurs, bien entendu, $\det(A) = ad - bc$. La matrice A_1 a un déterminant égal à $4 - 3 = 1$, donc $A_1^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$; la matrice A_2 a pour déterminant $20 - 21 = -1$, donc $A_2^{-1} \begin{pmatrix} -5 & 7 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$; enfin, la matrice A_3 a pour déterminant $20 - 18 = 2$, donc $A_3^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$.
3. Si A est inversible et si son inverse est à coefficients entiers, alors $\det(A)$ et $\det(A^{-1})$ sont tous les deux des nombres entiers. Mais comme ils sont inverses l'un de l'autre, ils sont nécessairement égaux à 1 ou -1 tous les deux. Réciproquement, si $\det(A) = \pm 1$, la matrice A est certainement inversible, et la formule exploitant la comatrice (utilisée dans la question précédente) assure que A^{-1} aura ses coefficients entiers. Dans ce cas, si $\det(A) = 1$, alors $A^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, et si $\det(A) = -1$ alors $A^{-1} = \begin{pmatrix} -d & b \\ c & -a \end{pmatrix}$.
4. D'après la question précédente, il suffit de déterminer les couples pour lesquels $\det(A) = 5 - bc \in \{-1, 1\}$. Si le déterminant vaut 1, on tombe sur la condition $bc = 4$, ce qui se produit pour les couples (b, c) d'entiers suivants : $(4, 1); (2, 2); (1, 4);$ $(-4, -1); (-2, -2); (-1, -4)$. Dans le cas où le déterminant vaut -1, on doit avoir $bc = 6$, ce qui donne les cas supplémentaires suivants : $(6, 1); (3, 2); (2, 3); (1, 6);$ $(-6, -1); (-3, -2); (-2, -3), (-1, -6)$. Il y a donc au total pas moins de 14 matrices convenables !

Partie B

1. Puisque $A^p = I$ avec $p \geqslant 1$, on peut écrire $A \times A^{p-1} = I$, ce qui prouve que A est inversible et que son inverse est A^{p-1}. Cette matrice est sûrement à coefficients entiers, comme toutes les puissances de A (si vous n'êtes pas convaincus, faites

une petite récurrence). Les résultats de la première partie nous assurent alors que $\det(A) \in \{-1, 1\}$.

2. On sait que $A^{-1} = A^{p-1}$, donc $(A^{-1})^p = (A^{p-1})^p = (A^p)^{p-1} = I^{p-1} = I$, ce qui prouve à la fois que $A^{-1} \in \mathcal{C}_2(\mathbb{Z})$ et que $h(A^{-1}) \leqslant p = h(A)$. Bon, mais le raisonnement fonctionne exactement de la même façon en remplaçant A par A^{-1} et aboutirait cette fois-ci à la conclusion $h(A) \leqslant h(A^{-1})$. Finalement, on a forcément $h(A^{-1}) = h(A)$.

3. Un peu de calcul bête et méchant : $C^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$, donc $C \in \mathcal{C}_2(\mathbb{Z})$ et $h(C) = 2$. De même, $D^2 = I$, donc $h(D) = I$. Calculons maintenant $CD = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Cette fois-ci, on trouve $(CD)^2 = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$, puis $(CD)^3 = \begin{pmatrix} -17 & 5 \\ -10 & 3 \end{pmatrix}$. Il parait peu probable qu'on retombe rapidement sur l'identité mais ce calcul ne prouve rien. Soit on essaie alors d'obtenir une formule pour les puissances de CD, soit on triche un peu en allant exploiter les résultats de la suite de cette partie B, et en constatant que l'ordre d'une matrice de $\mathcal{C}_2(\mathbb{Z})$ ne peut dépasser 4. Allez, faisons un calcul rigoureux, $(CD)^2 = -2CD + I$. Le polynôme $X^2 + 2X - 1$ annule donc la matrice CD, il admet pour discriminant $\Delta = 4 + 4 = 8$ et pour racines $x_1 = \dfrac{-2 + \sqrt{8}}{2} = \sqrt{2} - 1$ et $x_2 = -\sqrt{2} - 1$. Si on effectue la division euclidienne de X^n par $X^2 + 2X - 1$, on trouvera donc $X^n = Q(X^2 + 2X - 1) + a_n X + b_n$, avec en évaluant en x_1 et x_2 les deux relations $(\sqrt{2} - 1)^n = a_n(\sqrt{2} - 1) + b_n$ et $(-\sqrt{2} - 1)^n = -a_n(\sqrt{2} + 1) + b_n$. On en déduit en soustrayant les deux équations que $2\sqrt{2} a_n = x_1^n - x_2^n$, soit $a_n = \dfrac{x_1^n - x_2^n}{2\sqrt{2}}$; et en les additionnant que $2(b_n - a_n) = x_1^n + x_2^n$, soit $b_n = a_n + \dfrac{x_1^n + x_2^n}{2}$. Si la matrice appartenait à $\mathcal{C}_2(\mathbb{Z})$, les valeurs de $(CD)^n$ seraient périodiques, et les deux suites a_n et b_n également, ce qui n'est pas le cas.

4. Autrement dit, $P_A(X) = \begin{vmatrix} X - a & -b \\ -c & X - d \end{vmatrix} = (X - a)(X - d) - bc = X^2 - (a + d)X + ad - bc = X^2 - \operatorname{Tr}(A)X + \det(A)$.

5. Puisque la trace d'une matrice est invariante par changement de base (en effet, $\operatorname{Tr}(P^{-1}AP) = \operatorname{Tr}(APP^{-1}) = \operatorname{Tr}(A)$ quelle que soit la matrice A et quelle que soit la matrice de changement de base P), la trace de A est égale à la trace de la matrice diagonale obtenue dans une autre base, soit $\operatorname{Tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2$.

6. Puisque $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$, par inégalité triangulaire, $|\operatorname{Tr}(A)| \leqslant 1 + 1 = 2$. Puisque $\operatorname{Tr}(A)$ est un entier relatif, on en déduit les cinq valeurs possibles pour $\operatorname{Tr}(A)$.

7. Il y a cinq valeurs possibles pour la trace, deux pour le déterminant, donc effectivement 10 pour le polynôme $P_A = X^2 - \operatorname{Tr}(A)X + \det(A)$. Allons-y pour l'étude des racines dans chacun des dix cas possibles :
   - si $\det(A) = 1$ et $\operatorname{Tr}(A) = 2$, alors $P_A(X) = X^2 - 2X + 1 = (X - 1)^2$, ce qui est tout à fait possible. Dans ce cas, $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$.
   - si $\det(A) = 1$ et $\operatorname{Tr}(A) = 1$, alors $P_A(X) = X^2 - X + 1$, qui a pour discriminant $\Delta = 1 - 4 = -3$, et pour racines $\lambda_1 = \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $\lambda_2 = e^{-i\frac{\pi}{3}}$. Ce cas est possible puisque les deux racines sont de module 1.
   - si $\det(A) = 1$ et $\operatorname{Tr}(A) = 0$, alors $P_A(X) = X^2 + 1 = (X + i)(X - i)$, ce qui est encore possible, avec $\lambda_1 = i$ et $\lambda_2 = -i$.
   - si $\det(A) = 1$ et $\operatorname{Tr}(A) = -1$, alors $P_A(X) = X^2 + X + 1$, qui a pour discriminant

$\Delta = 1-4 = -3$, et pour racines $\lambda_1 = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $\lambda_2 = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$. Encore un cas tout à fait possible.

- si $\det(A) = 1$ et $\mathrm{Tr}(A) = -2$, alors $P_A(X) = X^2+2X+1 = (X+1)^2$, donc $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, ce qui est là encore cohérent.
- si $\det(A) = -1$ et $\mathrm{Tr}(A) = 2$, alors $P_A(X) = X^2 - 2X - 1$, qui a pour discriminant $\Delta = 4+4 = 8$, et pour racines $\lambda_1 = \dfrac{2+2\sqrt{2}}{2} = 1+\sqrt{2}$ et $\lambda_2 = 1-\sqrt{2}$. Ce cas est à exclure, les racines ne sont pas de module 1.
- si $\det(A) = 1$ et $\mathrm{Tr}(A) = 1$, alors $P_A(X) = X^2 - X - 1$, qui a pour discriminant $\Delta = 1+4 = 5$, et pour racines $\lambda_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\lambda_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$, qui ne sont pas de module 1, on exclut aussi ce cas.
- si $\det(A) = 1$ et $\mathrm{Tr}(A) = 0$, alors $P_A(X) = X^2 - 1 = (X+1)(X-1)$, sixième cas possible avec $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = -1$.
- si $\det(A) = 1$ et $\mathrm{Tr}(A) = -1$, alors $P_A(X) = X^2 + X - 1$, qui a pour discriminant $\Delta = 5$ et pour racines $\lambda_1 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $\lambda_2 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$, cas à exclure.
- si $\det(A) = 1$ et $\mathrm{Tr}(A) = 0$, alors $P_A(X) = X^2 + 2X - 1$, qui a pour discriminant $\Delta = 8$ et pour racines $\lambda_1 = \dfrac{-2+2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}-1$ et $\lambda_2 = -\sqrt{2}-1$. Un dernier cas à exclure, on en a bien gardé six sur les dix.

8. L'ordre d'une matrice appartenant à $\mathcal{C}_2(\mathbb{Z})$ est le même que celui de n'importe quelle matrice représentant la même application dans une autre base (en effet, avoir une puissance égale à l'identité est indépendant de la base puisque l'application identité est représentée par I dans toutes les bases), il suffit donc de calculer l'ordre de la matrice diagonale dont les coefficients sont égaux à λ_1 et λ_2 :
   - dans le premier cas, où $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, la matrice est déjà égale à l'identité, et donc d'ordre 1.
   - dans le deuxième cas, où $\lambda_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $\lambda_2 = e^{-i\frac{\pi}{3}}$, les deux coefficients sont racines sixièmes de l'unité (et pas moins), la matrice sera d'ordre 6 (et le cube de notre matrice sera égal à $-I$ puisque $\lambda_1^3 = \lambda_2^3 = -1$).
   - dans le troisième cas, où $\lambda_1 = i$ et $\lambda_2 = -i$, la matrice sera d'ordre 4 (son carré est égal à $-I$).
   - dans le quatrième cas, où $\lambda_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $\lambda_2 = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$, alors la matrice sera d'ordre 3 puisque nos deux coefficients sont racines cubiques de l'unité.
   - dans le cinquième cas, où $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, la matrice est d'ordre 2 (elle est égale à $-I$ dans une bonne base).
   - enfin, dans le seul cas de déterminant négatif, où $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = -1$, la matrice est d'ordre 2 également.
9. Il faut trouver un entier q pour lequel les matrices obtenues dans chacun des six cas, élevées à la puissance q, sont égales à l'identité. Ce sera le cas si q est multiple de chacun des ordres possibles, à savoir 1, 2, 3, 4 et 6. Le plus petit commun multiple de tous ces nombres étant 12, l'entier recherché sera 12.

Partie C

1. Preuve classique : l'application est manifestement symétrique, et linéaire à gauche (donc bilinéaire en exploitant la symétrie) par linéarité de l'intégrale : $\varphi(\lambda P + \mu R, Q) = \int_{-1}^{1} (\lambda P(t) + \mu R(t))Q(t)\ dt = \lambda \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\ dt + \mu \int_{-1}^{1} R(t)Q(t)\ dt =$

$\lambda\varphi(P,Q)+\mu\varphi(R,Q)$. De plus, $\varphi(P,P)=\displaystyle\int_{-1}^{1}P(t)^2\,dt$ est l'intégrale d'une fonction positive, donc l'application φ est positive. Elle ne peut s'annuler que si la fonction continue P s'annule sur $[-1,1]$, ce qui fait une bonne grosse infinité de racines pour P, qui est donc le polynôme nul. L'application φ est définie positive, c'est bien un produit scalaire.

2. Il s'agit d'appliquer le procédé de Gram-Schmidt à la base canonique $(1,X,X^2,X^3)$ de $\mathbb{R}_3[X]$. Commençons par normer 1 : $\displaystyle\int_{-1}^{1}1\,dt=2$, donc $\pi_0=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ est un polynôme normé pour φ. On calcule ensuite $X-\varphi\left(X,\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}=X-\dfrac{1}{2}\varphi(X,1)$. Or, $\varphi(X,1)=\displaystyle\int_{-1}^{1}t\,dt=\left[\frac{1}{2}t^2\right]_{-1}^{1}=0$. En fait, l'intégrale d'une fonction impaire étant toujours nulle entre -1 et 1, on aura de même $\varphi(X^2,X)=\varphi(X^3,1)=\varphi(X^3,X^2)=0$, ce qui va simplifier nos calculs. Il faut tout de même normer le vecteur X : $\varphi(X,X)=\displaystyle\int_{-1}^{1}t^2\,dt=\left[\frac{1}{3}t^3\right]=\frac{2}{3}$, donc $\pi_1=\sqrt{\dfrac{3}{2}}X$ est un polynôme normé. On calcule ensuite $X^2-\dfrac{1}{2}\varphi(X^2,1)=X^2-\dfrac{1}{3}$ (le calcul de l'intégrale est exactement le même que celui qu'on vient de faire pour normer X), puis $\varphi\left(X^2-\dfrac{1}{3},X^2-\dfrac{1}{3}\right)=\displaystyle\int_{-1}^{1}t^4-\frac{2}{3}t^2+\frac{1}{9}\,dt=\frac{2}{5}-\frac{4}{9}+\frac{2}{9}=\frac{2}{5}-\frac{2}{9}=\frac{8}{45}$. Le polynôme $\pi_2=\sqrt{\dfrac{45}{8}}\left(X^2-\dfrac{1}{3}\right)$ est donc normé. Enfin, on calcule $X^3-\dfrac{3}{2}\varphi(X^3,X)\times X=X^3-\dfrac{3}{2}\times\dfrac{2}{5}X=X^3-\dfrac{3}{5}X$. Un dernier calcul de norme : $\varphi\left(X^3-\dfrac{3}{5}X,X^3-\dfrac{3}{5}X\right)=\displaystyle\int_{-1}^{1}t^6-\frac{6}{5}t^4+\frac{9}{25}t^2\,dt=\frac{2}{7}-\frac{12}{25}+\frac{6}{25}=\frac{2}{7}-\frac{6}{25}=\frac{8}{175}$. Notre dernier polynôme normé sera donc $\pi_3=\sqrt{\dfrac{175}{8}}\left(X^3-\dfrac{3}{5}X\right)$. Si ça peut en rassurer certains, cet horrible calcul a été rajouté par mes soins, il n'était pas dans le sujet d'origine.

3. (a) C'est une question vraiment stupide puisqu'il s'agit juste de savoir ce qu'est une base.

   (b) L'hypothèse consiste à dire que P est un polynôme normé pour notre produit scalaire. Or, la base $(\pi_0,\pi_1,\pi_2,\pi_3)$ étant orthonormale, on peut calculer la norme de P en effectuant $\sqrt{\alpha_0^2+\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2}$. On en déduit directement que $\displaystyle\sum_{i=0}^{3}\alpha_i^2=1$.

   (c) C'est une application directe de l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^4$ (pour le produit scalaire usuel). En effet, $(a,b,c,d).(a',b',c,d')=aa'+bb'+cc'+dd'\leqslant\sqrt{\|(a,b,c,d)\|}\times\sqrt{\|(a',b',c',d')\|}$, ce qui donne l'inégalité demandée. La deuxième partie est une application immédiate de la première, en posant $a=\alpha_0$, $b=\alpha_1$, $c=\alpha_2$ et $d=\alpha_3$; $a'=\pi_0(x)$, $b'=\pi_1(x)$, $c'=\pi_2(x)$ et $d'=\pi_3(x)$. On trouve bien $|P(x)|=|aa'+bb'+cc'+dd'|\leqslant\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}\times\sqrt{a'^2+b'^2+c'^2+d'^2}$. La repmière racine carrée vaut 1 d'après la question précédente, la précédente est par définition $\sqrt{\displaystyle\sum_{i=0}^{3}\pi_i(x)^2}$.

   (d) Majorons donc : π_0 est constant égal à $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, donc $\pi_0(x)^2\leqslant\dfrac{1}{2}$; $\pi_1=\sqrt{\dfrac{3}{2}}X$

a pour maximum (en valeur absolue également) égal à $\sqrt{\frac{3}{2}}$ sur $[-1,1]$, donc $\pi_1(x)^2 \leqslant \frac{3}{2}$. La fonction $\pi_2 : x \mapsto \sqrt{\frac{45}{8}}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)$ est paire, elle est représentée par une parabole dont le minimum est atteint en 0, et prend une valeur maximale en 1 (et en -1 si on regarde en valeur absolue, $x^2 - \frac{1}{3}$ prenant une valeur supérieure en valeur absolue en 1 qu'en 0), égale à $\sqrt{\frac{45}{8} \times \frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{5}{2}}$, et $\pi_2^2(x) \leqslant \frac{5}{2}$. La dernière fonction est la plus pénible, elle est impaire donc on peut se contenter de l'étudier sur $[0,1]$. On peut oublier pour les variations la constante avec une racine carrée ignoble et se contenter de poser $f(x) = x^3 - \frac{3}{5}x$. La fonction f a pour dérivée $f'(x) = 3x^2 - \frac{3}{5}$, elle s'annule en $x = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Comme $f(0) = 0$, $f\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \frac{1}{5\sqrt{5}} - \frac{3}{5\sqrt{5}} = -\frac{2}{5\sqrt{5}}$, et $f(1) = \frac{2}{5}$, qui est plus grand en valeur absolue que les deux valeurs précédentes, π_3 est majorée en valeur absolue par $\sqrt{\frac{175}{8} \times \frac{2}{5}} = \sqrt{\frac{7}{2}}$, et $\pi_3(x)^2 \leqslant \frac{7}{2}$. En reprenant les résultats des questions précédente, on aura donc, pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_3[X]$ et pour tout réel $x \in [-1,1]$, $|P(x)| \leqslant \sqrt{\sum_{i=0^3} \pi_i(x)^2} \leqslant \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \frac{5}{2} + \frac{7}{2}} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. Si c'est vrai pour tout réel $x \in [-1,1]$, on a a fortiri $\sup_{x \in [-1,1]} |P(x)| \leqslant 2\sqrt{2}$.