TD n°13 : Sujet d'annales

PTSI B Lycée Eiffel

7 juin 2013

Problème (sujet A banque PT 2011, à peine retouché)

Dans tout le problème, on désignera par $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ constitué des matrices dont tous les coefficients sont des entiers relatifs.

Partie A

1. À quelle condition nécessaire et suffisante sur son déterminant une matrice A de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est-elle inversible ? Exprimer alors $\det(A^{-1})$ en fonction de $\det(A)$.
2. Déterminer les inverses des matrices suivantes : $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; $A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ et $A_3 = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.
3. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$, montrer que A est inversible et que $A^{-1} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ si et seulement si $\det(A) = \pm 1$. Donner alors l'expression de A^{-1} en fonction de a, b, c et d.
4. Déterminer les couples $(b, c) \in \mathbb{Z}^2$ pour lesquels $A = \begin{pmatrix} 5 & c \\ b & 1 \end{pmatrix}$ est inversible dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$.

Partie B

On désigne par $\mathcal{C}_2(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ telles qu'il existe un entier naturel non nul p pour lequel $A^p = I$. Le plus petit entier p pour lequel $A^p = I$ sera alors noté $h(A)$ et appelé ordre de la matrice A.

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{C}_2(\mathbb{Z})$, d'ordre $h(A) = p$.

1. Montrer que A admet une inverse appartenant à $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$, en déduire les valeurs possibles de $\det(A)$.
2. Vérifier que $A^{-1} \in \mathcal{C}_2(\mathbb{Z})$, et comparer les valeurs de $h(A^{-1})$ et de $h(A)$.
3. Montrer que les matrices $C = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ appartiennent à $\mathcal{C}_2(\mathbb{Z})$ et déterminer leurs ordres. Le produit CD appartient-il à $\mathcal{C}_2(\mathbb{Z})$?
4. On note P_A le polynôme défini par $P_A(X) = \det(XI - A)$. Déterminer P_A en fonction des coefficients de la matrice A, puis en utilisant uniquement la trace et le déterminant de A.
5. On admet pour la suite du problème que les racines (complexes) du polynôme P_A sont deux nombres λ_1 et λ_2 de module 1, et que l'endomorphisme associé à la matrice A dans la base canonique admet dans une autre base une matrice diagonale,

dont les coefficients diagonaux sont λ_1 et λ_2. Exprimer en fonction de λ_1 et λ_2 la trace de la matrice A.

6. En déduire que $\mathrm{Tr}(A) \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.
7. Vérifier qu'il n'y a que 10 polynômes possibles pour P_A, déterminer dans chaque cas les racines complexes de P_A, et exlure quatre cas en tenant compte des remarques faites plus haut.
8. Dans les six cas restants, déterminer l'ordre de A en utilisant la base dans lequelle elle devient diagonale.
9. En déduire le plus petit entier naturel q pour lequel, $\forall A \in \mathcal{C}_2(\mathbb{Z})$, $A^q = I$.

Partie C

On désigne par E l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à 3. On considère l'application φ définie sur $E \times E$ par $\varphi(P, Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\ dt$.

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur E.
2. Déterminer l'unique base orthonormale $(\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3)$ de E telle que $\forall i \in \{0, 1, 2, 3\}$, $\mathrm{Vect}(\pi_0, \dots, \pi_i) = \mathrm{Vect}(1, \dots, X^i)$, et $\varphi(\pi_i, X^i) > 0$.
3. Soit $P \in E$ tel que $\displaystyle\int_{-1}^{1} (P(t))^2\ dt = 1$.
   (a) Montrer qu'il existe $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^4$ tels que $P = \displaystyle\sum_{i=0}^{3} \alpha_i \pi_i$.
   (b) Sans déterminer les réels α_i, calculer $\displaystyle\sum_{i=0}^{3} \alpha_i^2$.
   (c) Soient a, b, c, d, a', b', c' et d' huit réels. Montrer que $|aa' + bb' + cc' + dd'| \leqslant \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} \times \sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2 + d'^2}$.
   En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}$, $|P(x)| \leqslant \sqrt{\displaystyle\sum_{i=0}^{3} (\pi_i(x))^2}$.
   (d) En étudiant $\displaystyle\sup_{-1 \leqslant x \leqslant 1} \pi_i(x)$ pour chacun des polynômes π_i, montrer que $\displaystyle\sup_{|x| \leqslant 1} |P(x)| \leqslant 2\sqrt{2}$.