# TD n°12 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

24 mai 2013

## Exercice

1. (a) On calcule sans difficulté, en exploitant la relation $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$, $R_\theta^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$. Toutes les matrices $R_\theta$ sont donc racines carrées de $I$, et il y en a une infinité puisque les valeurs de $\cos(\theta)$, par exemple, parcourent tout l'intervalle $[-1, 1]$. Les matrices $R_\theta$ sont par ailleurs des matrices de symétrie. Pour déterminer par rapport à quoi, on cherche les vecteurs invariants : $R_\theta \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcl} \cos(\theta)x & + & \sin(\theta)y & = & x \\ \sin(\theta)x & - & \cos(\theta)y & = & y \end{array} \right.$. Si $\theta \not\equiv \pi[2\pi]$, $\cos(\theta) + 1 \neq 0$, et on peut extraire de la deuxième équation $y = \dfrac{\sin(\theta)}{\cos(\theta) + 1}x$. En reportant dans la première, $\cos(\theta)x + \sin(\theta)y = \dfrac{\cos(\theta)(1 + \cos(\theta)) + \sin^2(\theta)}{1 + \cos(\theta)}x = \dfrac{1 + \cos(\theta)}{1 + \cos(\theta)}x = x$, et l'équation est donc toujours vérifiée. On effectue donc une symétrie par rapport à la droite d'équation $y = \dfrac{\sin(\theta)}{1 + \cos(\theta)}x$. Si $\theta \equiv \pi[2\pi]$, on trouve simplement comme condition $x = 0$, la symétrie s'effectue par rapport à l'axe des ordonnées. Cherchons maintenant parallèlement à quoi on symétrise, en résolvant le système $\left\{ \begin{array}{rcrcl} \cos(\theta)x & + & \sin(\theta)y & = & -x \\ \sin(\theta)x & - & \cos(\theta)y & = & -y \end{array} \right.$. Cette fois, c'est la valeur $\theta \equiv 0[2\pi]$ qui est particulière, et qui mène à l'axe des ordonnées. Sinon, la deuxième équation donne $y = \dfrac{\sin(\theta)}{\cos(\theta) - 1}x$, et l'autre équation est à nouveau vérifiée (c'est normal, les deux espaces étant supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$, ils sont chacun de dimension 1). On constate que la symétrie est toujours une symétrie orthogonale, puisque nos deux droites sont dirigées respectivement par $(\cos(\theta) + 1, \sin(\theta))$ et par $(\cos(\theta) - 1, \sin(\theta))$, deux vecteurs dont le produit scalaire vaut $\cos^2(\theta) - 1 + \sin^2(\theta)) = 0$.

   (b) Cherchons donc une racine carrée de $A$ sous la forme $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on calcule $B^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix}$. La condition $ab + bd = 1$ impose que $a + d \neq 0$, ce qui implique à son tour, puisque $ac + cd = 0$, que $c = 0$. En regardant les coefficients diagonaux, on obtient alors $a^2 = d^2 = 0$, donc $a = d = 0$, ce qui contredit fortement le fait que $a + d \neq 0$. Il ne peut donc y avoir de racine carrée pour la matrice $A$ (même pas dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ d'ailleurs, où le même raisonnement par l'absurde fonctionne).

2. (a) Bon, c'est du cours : $\sqrt{1+t} = 1 + \dfrac{1}{2}t - \dfrac{1}{8}t^2 + \dfrac{1}{16}t^3 + o(t^3)$. En élevant le tout au carré, on trouve donc $1 + t \underset{t \to 0}{=} \left(1 + \dfrac{1}{2}t - \dfrac{1}{8}t^2 + \dfrac{1}{16}t^3\right)^2 + o(t^3)$. Or,

ce qui se cache derrière le $o(t^3)$ est nécessairement un polynôme, et même un polynôme de degré au plus 6, puisqu'il est obtenu en faisant la différence du membre de gauche et du carré de la parenthèse. Ce polynôme ne peut avoir de terme constant, ou de degré 1, 2 ou 3, sinon il ne serait pas négligeable devant $t^3$ quand $t$ tend vers 0. Il peut donc s'écrire sous la forme $a_4t^4 + a_5t^5 + a_6t^6 = t^4Q(t)$, où $t$ est un polynôme de degré au plus 2 qu'on ne cherchera pas à expliciter. Puisqu'on est désormais en présence d'une égalité entre polynômes, elle est tout le temps valable, et on peut écrire plus généralement $(1 + X) = \left(1 + \frac{1}{2}X - \frac{1}{8}X^2 + \frac{1}{16}X^3\right)^2 + X^4Q(X)$.
Les plus bourrins d'entre vous pouvaient également calculer brutalement $1 + t - \left(1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + \frac{1}{16}t^3\right)^2 = 1 + t - 1 - \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{64}t^4 - \frac{1}{256}t^6 - t + \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{8}t^3 + \frac{1}{8}t^3 - \frac{1}{16}t^4 + \frac{1}{64}t^5 = -\frac{5}{64}t^4 + \frac{1}{64}t^5 - \frac{1}{256}t^6$, qui est bien de la forme souhaitée.

(b) En appliquant ce qui précède à la matrice $A - I$, on trouve $I + (A - I) = \left(I + \frac{1}{2}(A - I) - \frac{1}{8}(A - I)^2 + \frac{1}{16}(A - I)^3\right) + (A - I)^4Q(A - I)$. Puisque le membre de gauche est égal à $A$ et que $(A - I)^4$ est supposée nulle, la matrice $B = I + \frac{1}{2}(A - I) - \frac{1}{8}(A - I)^2 + \frac{1}{16}(A - I)^3$ est donc une racine carrée de $A$. Dans le cas concret présenté ensuite, on calcule (de préférence à la calculatrice) : $(A - I)^2 = \begin{pmatrix} -5 & -1 & 2 & 2 \\ 15 & 3 & -6 & -6 \\ 19 & 4 & -7 & -7 \\ -24 & -5 & 9 & 9 \end{pmatrix}$, puis $(A - I)^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ -3 & 0 & 3 & 3 \\ -4 & 0 & 4 & 4 \\ 5 & 0 & -5 & -5 \end{pmatrix}$ et enfin $(A - I)^4 = 0$, et on obtient ensuite $B = \begin{pmatrix} \frac{3}{16} & \frac{9}{8} & \frac{27}{16} & \frac{35}{16} \\ \frac{31}{16} & -\frac{19}{8} & -\frac{73}{16} & -\frac{97}{16} \\ \frac{39}{8} & -4 & -\frac{47}{8} & -\frac{71}{8} \\ -\frac{91}{16} & \frac{41}{8} & \frac{137}{16} & \frac{193}{16} \end{pmatrix}$. On vérifie bien sûr « facilement » que $B^2 = A$ comme prévu.

3. (a) La relation $B^2 = A$ se traduit par $g \circ g = f$, donc $g \circ f = f \circ g = g^3$, les deux applications commutent.

(b) Il suffit en fait de constater qu'une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont deux à deux distincts ne commute qu'avec les matrices diagonales. En effet, si on note $d_1, \ldots, d_n$ les coefficients sur la diagonale de la matrice diagonale de $f$ dans une bonne base (on notera cette matrice diagonale $D$), et si on note $M = (m_{ij})$ une matrice telle que $m_{ij} \neq 0$ pour un certain couple vérifiant $i \neq j$, alors $(DM)_{ij} = d_im_{ij}$, et $(MD_{ij}) = m_{ij}d_j$, qui ne peuvent être égaux. La matrice $C$ de $g$ dans la base où $f$ est représentée par $D$ est donc diagonale.

(c) Si on veut avoir $g^2 = f$, il faut nécessairement que $C^2 = D$, c'est-à-dire, en notant $c_i$ les coefficients diagonaux de $C$ (les autres sont nuls !) que $c_i^2 = d_i$ pour chaque coeffient. Il y a une grosse imprécision dans l'énoncé, si on est effectivement dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il faut absolument que les coefficients $d_i$ soient strictement positifs pour que ça marche. On peut alors choisir $c_i = \pm\sqrt{d_i}$, ce qui laisse effectivement $2^n$ matrices $C$ possibles. Reste à revenir dans la base canonique. On sait que $D = P^{-1}AP$ pour une certaine matrice inversible $P$, et $C^2 = D$. On peut alors constater que la condition $B^2 = A$ est équivalente à $P^{-1}B^2P = D$, soit $(P^{-1}BP)^2 = D$. Autrement dit, $P^{-1}BP$ doit être une des matrices $C$ qu'on vient d'obtenir, c'est-à-dire que $B = PCP^{-1}$, ce qui donne également $2^n$ matrices $B$ convenables.

# Problème

## I. Relations sur les polynômes $L_n$.

1. Calculons : $L_0(x) = e^x f_0(x) = e^x e^{-x} = 1$ ; $f_1(x) = xe^{-x}$, donc $f_1'(x) = (1-x)e^{-x}$ et $L_1 = 1 - X$ ; enfin, $f_2(x) = \dfrac{x^2}{2}e^{-x}$ donc $f_2'(x) = \left(x - \dfrac{x^2}{2}\right)e^{-x}$, $f_2''(x) = \left(1 - x - x + \dfrac{x^2}{2}\right)e^{-x}$, et enfin $L_2 = 1 - 2X + \dfrac{1}{2}X^2$.
2. On peut appliquer la formule de Leibniz au produit $\dfrac{x^n}{n!} \times e^{-x}$. Les dérivées successives de $e^{-x}$ sont simplement de la forme $(-1)^k e^{-x}$, celles de $\dfrac{x^n}{n!}$ peuvent s'écrire $\dfrac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n!}x^{n-k} = \dfrac{x^{n-k}}{(n-k)!}$ (pour la dérivée $k$-ème). On en déduit que $f_n^{(n)}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(e^{-x})^{(k)}\left(\frac{x^n}{n!}\right)^{(n-k)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{k!}x^k e^{-x}$, d'où la formule pour $L_n$. Il s'agit bien d'un polynôme, manifestement de degré $n$ et de coefficient dominant $\dfrac{(-1)^n}{n!}$ (c'est cohérent avec les calculs effectués à la première question).
3. Un calcul gentil pour commencer, une dérivée de produit : $f_{n+1}'(x) = \dfrac{x^n}{n!}e^{-x} - \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{-x} = f_n(x) - f_{n+1}(x)$. Dérivons cette égalité $n+1$ fois et multiplions par $e^x$ pour obtenir $e^x f_{n+1}^{(n+2)}(x) = e^x f_n^{n+1}(x) - e^x f_{n+1}^{(n+1)}(x)$. On reconnait dans le dernier terme $L_{n+1}(x)$, mais les deux premiers ne sont pas directement identifiables : $f_{n+1}^{(n+2)}(x) = (e^{-x}L_{n+1}(x))' = -e^{-x}L_{n+1}(x) + e^{-x}L_{n+1}'(x)$. De même, $e^x f_n^{(n+1)}(x) = L_n'(x) - L_n(x)$, et notre relation devient $L_{n+1}' - L_{n+1} = L_n' - L_n - L_{n+1}$, ce qui correspond bien à ce qui est demandé.
4. La première moitié du calcul est encore plus facile que ci-dessus : $\dfrac{x}{n+1} \times \dfrac{x^n}{n!}e^{-x} = \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{-x}$, ça marche. On dérive cette identité $n$ fois et on utilise le même calcul que ci-dessus (pour le membre de droite, on applique la formule de Leibniz) : $f_{n+1}^{(n+1)}(x) = \dfrac{x}{n+1}f_n^{(n+1)}(x) + (n+1) \times \dfrac{1}{n+1}f_n^{(n)}(x)$. On multiplie tout par $(n+1)e^x$ : $(n+1)L_{n+1}(x) = x(L_n'(x) - L_n(x)) + (n+1)L_n(x)$, soit $(n+1)L_{n+1}(x) = xL_n'(x) + (n+1-x)L_n(x)$.
5. Il faut mixer les deux relations précédentes : si on dérive celle qu'on vient d'obtenir, $(n+1)L_{n+1}'(x) = L_n'(x) + xL_n''(x) + (n+1-x)L_n'(x) - L_n(x)$. Remplaçons maintenant $L_{n+1}'(x)$ par $L_n'(x) - L_n(x)$ (relation de la question 3), pour obtenir $(n+1)L_n'(x) - (n+1)L_n(x) = xL_n''(x) + (n+2-x)L_n'(x) - L_n(x)$, soit en effet $xL_n''(x) + (1-x)L_n'(x) + nL_n(x) = 0$.

## II. Un produit scalaire et une application sur $\mathbb{R}_n[X]$.

1. L'application $\varphi$ est clairement symétrique, contentons-nous de vérifier la linéarité à gauche : $\varphi(\lambda P_1 + \mu P_2, Q) = \lim_{n\to+\infty} \int_0^n (\lambda P_1(x) + \mu P_2(x))Q(x)e^{-x}\ dx = \lambda \lim_{n\to+\infty} \int_0^n P_1(x)Q(x)e^{-x}\ dx + \mu \lim_{n\to+\infty} \int_0^n P_2(x)Q(x)e^{-x}\ dx$ par linéarité de l'intégrale et du calcul de limites. L'application $\varphi$ esyt positive car $\varphi(P,P)$ est une limite d'intégrales de fonctions positives, donc positive. Supposons que $\varphi(P,P) = 0$. Cela signifie que la suite définie par $u_n = \int_0^n P^2(x)e^{-x}\ dx$ tend vers 0, alors qu'elle est consituée de réels positifs et surtout croissante (en effet, $u_{n+1} - u_n = \int_n^{n+1} P^2(x)e^{-x}\ dx \geqslant 0$). La suite est donc nulle, ce qui impose la nullité de $P^2$ sur tous les intervalles de la forme $[0,n]$, ce qui fait vraiment braucoup trop de racines pour un polynôme. L'application $\varphi$ est donc définie positive, c'est bien un produit scalaire.
2. C'est évident, $f(P)$ est toujours un polynôme et $f(\lambda P + \mu Q) = X(\lambda P + \mu Q)'' - (X-1)(\lambda P + \mu Q)' = \lambda XP'' + \mu XQ'' - \lambda(X-1)P' - \mu(X-1)Q' = \lambda f(P) + \mu f(Q)$ par linéarité de la dérivation.
3. Dérivons donc : $(xP'(x)e^{-x})' = P'(x)e^{-x} + xP''(x)e^{-x} - xP'(x)e^{-x} = f(P)(x)e^{-x}$.
4. Il suffit de faire une intégration par parties dans la définition de $f(P).Q$, en posant $v'(x) = f(P)(x)e^{-x}$, donc $v(x) = xP'(x)e^{-x}$ d'après la question précédente ; et $u(x) = Q(x)$, soit $u'(x) = Q'(x)$. On trouve alors $f(P).Q = \lim_{n\to+\infty} [xP'(x)Q(x)e^{-x}]_0^n - \lim_{n\to+\infty} \int_0^n xP'(x)Q'(x)e^{-x}\ dx$. Le crochet s'annule en 0, et a une limite nulle quand $n$ tend vers $+\infty$ par croissance comparée. Il ne reste donc que le deuxième terme, ce qui correspond à la formule de l'énoncé.
5. La formule obtenue à la question précédente est symétrique en $P$ et $Q$, ce qui prouve que $P.f(Q) = f(Q).P = f(P).Q$.
6. Encore une question triviale : $f(L_n) = XL_n'' - (X-1)L_n' = -nL_n$ d'après la dernière question de la première partie.
7. Appliquons le résultat de la question 6 à $L_n$ et $L_p$, pour des valeurs distinctes de $n$ et $p$ : $f(L_n).L_p = (-nL_n).L_p = -nL_n.L_p$, et $L_n.f(L_p) = L_n.(-pL_p) = -pL_n.L_p$. Si ces deux quantités sont égales, on doit avoir $L_n.L_p$, ce qui prouve l'orthogonalité de la famille.
8. C'est encore assez évident, le degré de $XP''$ est plus petit que celui de $P$, celui de $(X-1)P'$ ne peut pas être plus grand, donc $f(P) \in \mathbb{R}_n[X]$ si $P \in \mathbb{R}_n[X]$.
9. Il suffit de dire que $(L_0, \dots, L_n)$ est une famille de polynômes échelonnée pour en déduire qu'il s'agit d'une base. Puisqu'on a prouvé un tout petit peu plus haut que $f(L_n) = -L_n$, la matrice de $f$ dans cette base est la matrice diagonale
$$\begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & -1 & & & \\ & & -2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & -n \end{pmatrix}.$$
10. L'application n'est pas bijective, plus précisément $\ker(f) = \mathrm{Vect}(L_0)$. Quant à trouver une base dans laquelle la matrice est diagonale, on se moque du monde, on vient d'en donner une !