TD n°12 : révisions diverses

PTSI B Lycée Eiffel

24 mai 2013

Exercice

Le but de cet exercice est d'étudier dans quelques cas, l'existence d'une racine carrée pour une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire d'une matrice B vérifiant $B^2 = A$.

1. Commençons par étudier des cas particuliers dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   (a) Soit $\theta \in \mathbb{R}$, on note $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$. Calculer $(R_\theta)^2$, et en déduire que la matrice I_2 admet une infinité de racines carrées. Donner les éléments caractéristiques de l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ représentée par la matrice R_θ dans la base canonique.
   (b) Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'admet pas de racine carrée.
2. On retourne au cas général, mais en supposant cette fois-ci que $A - I$ est une matrice nilpotente d'ordre 4 (autrement dit, que $(A - I)^4 = 0$).
   (a) Rappeler le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $\sqrt{1+t}$, en déduire qu'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $1 + X = (a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3)^2 + X^4Q(X)$.
   (b) Prouver que la matrice A admet une racine carrée, calculer explicitement une racine carrée de la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 4 & 5 \\ 8 & -5 & -11 & -14 \\ 15 & -7 & -15 & -20 \\ -18 & 9 & 20 & 26 \end{pmatrix}$.
3. On suppose désormais que la matrice A est celle dans la base canonique d'une application linéaire f admettant dans une autre base $\mathcal{B}$ une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont deux à deux distincts.
   (a) Montrer que, si B est une racine carrée de A, l'application g ayant pour matrice B dans la base canonique commute avec f.
   (b) Montrer que la matrice de g dans la base $\mathcal{B}$ est nécessairement diagonale.
   (c) En déduire que A admet 2^n racines carrées distinctes, et expliquer comment les obtenir à partir de la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ et de la matrice de passage de la base canonique vers $\mathcal{B}$.

Problème

On considère, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, les applications $f_n : x \mapsto \dfrac{x^n e^{-x}}{n!}$, et $L_n : x \mapsto e^x f_n^{(n)}(x)$.

I. Relations sur les polynômes L_n.

1. Calculer L_0, L_1 et L_2.
2. Montrer que $L_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}\binom{n}{k} x^k$, en déduire que L_n est un polynôme dont on précisera le degré et le coefficient dominant.
3. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f'_{n+1}(x) = f_n(x) - f_{n+1}(x)$, en déduire que $L'_{n+1}(x) = L'_n(x) - L_n(x)$.
4. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_{n+1}(x) = \dfrac{x}{n+1} f_n(x)$, en déduire que $(n+1)L_{n+1}(x) = xL'_n(x) + (n+1-x)L_n(x)$.
5. Établir que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $xL''_n(x) - (x-1)L'_n(x) + nL_n(x) = 0$.

II. Un produit scalaire et une application sur $\mathbb{R}_n[X]$.

1. Pour tous polynômes P et Q, on note $\varphi(P,Q) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^n P(x)Q(x)e^{-x}\,dx$ (on admet que cette limite existe toujours). Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$, on notera désormais $\varphi(P,Q) = P.Q$.
2. On considère désormais l'application $f : P \mapsto XP'' - (X-1)P'$, montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
3. Montrer que, pour tout polynôme P, l'application $x \mapsto f(P)(x)e^{-x}$ est la dérivée de l'application $x \mapsto xP'(x)e^{-x}$.
4. En déduire que $f(P).Q = -\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^n xP'(x)Q'(x)e^{-x}\,dx$.
5. Montrer que, quels que soient les polynômes P et Q, $f(P).Q = P.f(Q)$.
6. En utilisant les résultats de la première partie, calculer $f(L_n)$.
7. En déduire que la famille $(L_0, L_1, \dots, L_n)$ est orthogonale.
8. Montrer que, $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $f(P) \in \mathbb{R}_n[X]$. On continue désormais à noter f la restriction à $\mathbb{R}_n[X]$ de l'application f initiale.
9. Montrer que $(L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$, et donner la matrice de f dans cette base.
10. L'application f est-elle bijective ? Peut-on trouver une base dans laquelle sa matrice est diagonale ?