TD n°11 : révisions pour le DS8

PTSI B Lycée Eiffel

19 avril 2013

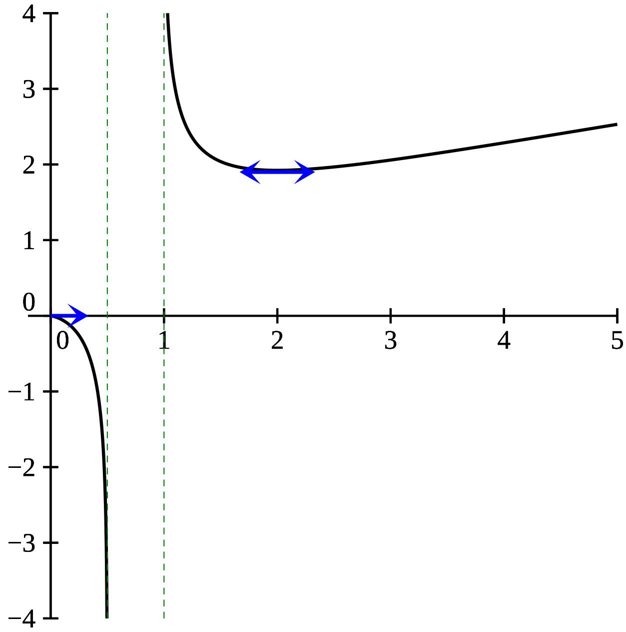
Exercice 1

1. Notons $g(t) = \dfrac{1}{\ln(t)}$, ça peut toujours serivir pour la suite. La fonction g est définie sur $\mathbb{R}^{+*}\backslash\{1\}$. Pour que f soit définie en x, il faut que tout l'intervalle $[x; 2x]$ soit inclus dans $\mathcal{D}_f$. ce ne sera manifestement pas le cas si $x \leq 0$. Si $x \geq 0$, il faut encore que $1 \notin [x; 2x]$, ce qui sera le cas si $2x < 1$ ou si $1 < x$. On en déduit que $\mathcal{D}_g = \left]0; \dfrac{1}{2}\right[\cup]1; +\infty[$.
2. En notant G une primitive de g sur chacun des deux intervalles de définition de f (la fonction g y est continue, donc y admet des primitives), on peut écrire $f(x) = G(2x) - G(x)$, donc f est dérivable et $f'(x) = 2g(2x) - g(x) = \dfrac{2}{\ln(2x)} - \dfrac{1}{\ln(x)} = \dfrac{2\ln(x) - \ln(2x)}{\ln(2x)\ln(x)} = \dfrac{2\ln(\frac{x}{2})}{\ln(2x)\ln(x)}$. Sur $\mathcal{D}_f$, le dénominateur est toujours positif (les deux ln sont positifs quand $x > 1$, ils sont négatifs quand $x < \dfrac{1}{2}$). La dérivée est donc du signe de $\ln\left(\dfrac{x}{2}\right)$, la fonction est décroissante sur $\left]0; \dfrac{1}{2}\right[$ et sur $]1; 2]$, et croissante sur $[2; +\infty[$
3. On peut procéder par encadrement grossier : $\forall x > 1$, $\forall t \in [x; 2x]$, $\dfrac{1}{\ln(x)} \leq \dfrac{1}{\ln(t)} \leq \dfrac{1}{\ln(2x)}$. En intégrant cet encadrement entre x et $2x$, on trouve $\dfrac{x}{\ln(x)} \leq f(x) \leq \dfrac{x}{\ln(2x)}$. Par croissance comparée, les deux extrêmes ont une limite infinie en $+\infty$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. On peut reprendre le même encadrement pour la limite de $\dfrac{f(x)}{x}$: $\dfrac{1}{\ln(x)} \leq \dfrac{f(x)}{x} \leq \dfrac{1}{\ln(2x)}$. Cette fois-ci, les deux extrêmes tendent vers 0 donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$. La courbe admet donc en $+\infty$ une branche parabolique de direction (Ox).
4. Avec les développements limités, $\varphi(t) = \dfrac{t - 1 - \ln(t)}{\ln(t)(t-1)} \underset{t \to 1}{=} \dfrac{t - 1 - (t - 1 - \frac{(t-1)^2}{2} + o(t-1))}{\ln(t)(t-1)} \sim \dfrac{\frac{(t-1)^2}{2}}{(t-1)^2} \sim \dfrac{1}{2}$. Autrement dit, $\lim\limits_{t \to 1} \varphi(t) = \dfrac{1}{2}$. On peut alors écrire $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \varphi(t) + \dfrac{1}{t-1}\, dt = \int_x^{2x} \varphi(t) + [\ln(t-1)]_x^{2x} = \ln(2x-1) - \ln(x-1) + \int_x^{2x} \varphi(t)\, dt$. Comme φ est prolongeable par continuité en 1, elle est continue sur $[1; 3]$ (par exemple) donc bornée sur cet intervalle. Pour $x \in \left]; \dfrac{3}{2}\right]$, $\displaystyle\int_x^{2x} \varphi(t)\, dt$ est donc également bornée, et on peut écrire $f(x) \underset{x \to 1}{=} \ln(2x - 1) - \ln(x-1) + O(1)$. Comme $\lim\limits_{x \to 1} \ln(2x-1) = 0$ et $\lim\limits_{x \to 1} \ln(x-1) = -\infty$, on en déduit que $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = +\infty$.
5. On peut reprendre exactement le même raisonnement qu'à la question précédente, l'intégrale de φ est toujours bornée pour la même raison de prolongement par continuité ; $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \ln(1-2x) =$

$-\infty$ et $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \ln(1-x) = -\ln(2)$ (les signes ont changé à l'intérieur du ln car $\dfrac{1}{t-1}$ est négatif sur l'intervalle considéré). On conclut facilement que $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} f(x) = -\infty$.

6. Reprenons ici l'encadrement obtenu à la deuxième question, en échangeant les bornes puisque les ln sont négatifs sur $\left]0;\dfrac{1}{2}\right[$: $\dfrac{x}{\ln(2x)} \leq f(x) \leq \dfrac{x}{\ln(x)}$. Les deux membres extrêmes tendent (fortement) vers 0 quand x tend vers 0, d'où la limite demandée. On peut même signaler au passage que $f'(x) = \dfrac{2\ln(x) - 2\ln(2)}{(\ln(x)+\ln(2))(\ln(x))} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{2\ln(x)}{(\ln(x))^2} \sim \dfrac{2}{\ln(x)}$, donc $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = 0$. D'après le théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$, la fonction f est donc dérivable en 0 et y admet une tangente horizontale.

7. Voici une allure de la courbe (à la main, difficile de donner une valeur approchée précise du minimum $f(2)$:



Exercice 2

1. C'est essentiellement évident : $f(P)$ est bien évidemment un polynôme, et $f(\lambda P+\mu Q) = (\lambda P + \mu Q)(X+1) - (\lambda P+\mu Q)(X) = \lambda(P(X+1)-P(X)) + \mu(Q(X+1)-Q(X)) = \lambda f(P) + \mu f(Q)$, donc l'application est linéaire.

2. Si $P \in \ker(f)$, on a $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x+1) = f(x)$. On prouve par une récurrence évidente que $P(k) = P(0)$: c'est bien sûr vrai pour $k = 0$, et si on le suppose vrai au rang k, comme $P(k+1) = P(k)$, ce sera également vrai pour $k+1$. Si on note $Q(X) = P(X) - P(0)$, le polynôme Q s'annule pour tous les entiers, il est donc nul (il a une infinité de racines). Par conséquent, P est un polynôme constant égal à $P(0)$. Réciproquement, tous les polynômes constants sont dans le noyau de f, donc $\ker(f) = \mathbb{R}_0[X]$.

3. Le polynôme $P(X+1)$ ayant le même degré que P, la différence des deux a un degré inférieur ou égal à celui de P, ce qui suffit à prouver la stabilité de $\mathbb{R}_n[X]$ par f. On peut en fait dire mieux : si $P(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$, avec $a_n \neq 0$, alors $P(X+1) - P(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k (X+1)^k - \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$. Contentons-nous d'isoler les termes de degrés n et $n-1$, en développant les $(X+1)^k$ à l'aide de la

formule du binôme de Newton : $f(P) = a_nX^n + na_nX^{n-1} + a_{n-1}X^{n-1} - a_nX^n - a_{n-1}X^{n-1} + Q(X)$, où Q est de degré au plus $n-2$. Après simplifications, $f(P) = na_nX^{n-1} + Q(X)$. Autrement dit, $d^\circ(f(P)) = d^\circ(P) - 1$ (sauf bien entendu si P est constant).

4. Bon, on l'a déjà fait à la question précédente, mais faisons encore plus explicite. Soit $P(x) = aX^3 + bX^2 + cX + d \in \mathbb{R}_3[X]$, alors $P(X+1) = a(X^3 + 3X^2 + 3X + 1) + b(X^2 + 2X + 1) + c(X+1) + d$, donc $f(P) = P(X+1) - P(X) = 3aX^2 + (3a+2b)X + a + b + c$. On en déduit que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(3X^2 + 3X + 1, 2X + 1, 1)$. Cette famille de trois polynômes est échelonnée dans $\mathbb{R}_2[X]$, donc en constitue une base, et $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}_2[X]$. Pour le noyau, en reprenant le calcul ci-dessus, il faut résoudre le système constitué des équations $3a = 3a + 2b = a + b + c = 0$, qui donne très facilement $a = b = c = 0$. Puisque d n'intervient pas dans les équations, $\ker(f) = \{d \mid d \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}_0[X]$.
5. Non, il n'y a pas de bug dans la question, on connait l'image de la restriction à $\mathbb{R}_n[X]$, et on cherche l'image « globale ». Si $f(\mathbb{R}_n[X]) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$, alors $\mathbb{R}_{n-1}[X] \subset \mathrm{Im}(f)$. Mais comme la réunion des sous-espaces $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ est $\mathbb{R}[X]$ tout entier, l'application f est surjective. Elle n'est par contre pas injective (on a calculé son noyau il y a un moment) donc pas bijective non plus.
6. Par un calcul essantiellement identique à celui de la question 4, l'image du polynôme $P = aX^4 + bX^3 + cX^2 + dX + e$ est $f(P) = 4aX^3 + (6a+3b)X^2 + (4a+3b+2c)X + a + b + c + d$. Pour trouver un antécédent de X^3, on résout $\left\{\begin{array}{ccccccccc} 4a & & & & & & & = & 1 \\ 6a & + & 3b & & & & & = & 0 \\ 4a & + & 3b & + & 2c & & & = & 0 \\ a & + & b & + & c & + & d & = & 0 \end{array}\right.$. On trouve aisément $a = \dfrac{1}{4}$; $b = -2a = -\dfrac{1}{2}$; $c = \dfrac{-4a-3b}{2} = \dfrac{1}{4}$; et $d = -a - b - c = 0$. Enfin, on choisira $e = 0$ pour ne pas s'embêter, donc on pose $P = \dfrac{1}{4}X^4 - \dfrac{1}{2}X^3 + \dfrac{1}{4}X^2$. On peut alors effectuer le calcul suivant, en exploitant que $P(k+1) - P(k) = k$ pour tout entier k : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 = \sum_{k=0}^{n} P(k+1) - P(k) = P(n+1) - P(0) = P(n+1)$ (somme télescopique), donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{1}{4}(n+1)^4 - \frac{1}{2}(n+1)^3 + \frac{1}{4}(n+1)^2 = \frac{(n+1)^2}{4} \times ((n+1)^2 - 2(n+1) + 1) = \frac{(n+1)^2}{4} \times (n^2 + 2n + 1 - 2n - 2 + 1) = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$. On reconnaît bien la formule du cours !

Exercice 3

1. Les fonctions h_n sont C^∞ sur $]-1;+\infty[$, de dérivées $h_n'(x) = \dfrac{n}{1+x} + \dfrac{1+x-x}{(1+x)^2} = \dfrac{n(1+x)+1}{(1+x)^2}$. Le numérateur étant toujours positif sur $]-1;+\infty[$, les fonction h_n sont toutes strictement croissantes sur cet intervalle. Comme $h_n(0) = n\ln 1 + 0 = 0$, les fonctions h_n sont donc négatives sur $]-1;0]$ et positives sur $[0;+\infty[$ (aucune raison de distinguer le cas $n = 1$ ici).
2. La fonction f_n est C^∞ sur $]-1;+\infty[$, de dérivée $f_n'(x) = nx^{n-1}\ln(1+x) + \dfrac{x^n}{1+x} = x^{n-1}h_n(x)$. Si n est impair, x^{n-1} est toujours positif et f_n est décroissante puis croissante, atteignant pour minimum 0 en 0, et ayant pour limite $+\infty$ aux deux bornes de son domaine de définition. Si n est pair, par contre, x^{n-1} change de signe en 0, et $x^{n-1}h_n(x)$ est toujours positif, donc f_n est strictement croissante sur $]-1;+\infty[$, avec pour limite $-\infty$ en -1 et $+\infty$ en $+\infty$.
3. Procédons par identification : $ax + b + \dfrac{c}{x+1} = \dfrac{ax^2 + (a+b)x + b + c}{x+1}$, donc on aura égalité si $a = 1$, $a + b = 0$ et $b + c = 0$, soit $a = c = 1$ et $b = -1$, donc $\dfrac{x^2}{x+1} = x - 1 + \dfrac{1}{x+1}$. On a donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}dx = \int_0^1 x - 1 + \frac{1}{x+1}dx = \left[\frac{x^2}{2} - x + \ln(x+1)\right]_0^1 = \frac{1}{2} - 1 + \ln 2 = \ln 2 - \frac{1}{2}$.

4. Par définition, $U_1 = \int_0^1 x\ln(1+x)dx$. Effectuons une intégration par partie en posant $u(x) = \ln(1+x)$ et $v'(x) = x$, donc $u'(x) = \dfrac{1}{x+1}$ et $v(x) = \dfrac{x^2}{2}$. On obtient $U_1 = \left[\dfrac{x^2}{2}\ln(1+x)\right]_0^1 - \dfrac{1}{2}\int_0^1 \dfrac{x^2}{x+1}dx = \dfrac{\ln 2}{2} - \dfrac{1}{2}\left(\ln 2 - \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{4}$.
5. Pour tout entier naturel n, on a $\forall x \in [0;1]$, $x^{n+1} \leq x^n$, donc $x^{n+1}\ln(1+x) \leq x^n\ln(1+x)$, d'où en intégrant l'inégalité sur $[0;1]$, $U_{n+1} \leq U_n$. La suite (U_n) est donc décroissante. Comme de plus (U_n) est une suite à valeurs positives (les fonctions f_n prennent toutes des valeurs positives sur $[0;1]$), la suite est décroissante minorée, donc convergente.
6. La positivité de U_n a déjà été justifiée. De plus, sur $[0;1]$, $\ln(1+x) \leq \ln 2$, donc $U_n \leq \int_0^1 x^n \ln 2 = \ln 2\left[\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \dfrac{\ln 2}{n+1}$. Le théorème des gendarmes permet alors d'affirmer que $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$.
7. (a) Inutile de faire une récurrence, il s'agit d'une somme géométrique de raison $-x$, donc $S_n(x) = \dfrac{1-(-x)^{n+1}}{1-(-x)} = \dfrac{1}{1+x} + \dfrac{(-1)^n x^{n+1}}{1+x}$.

   (b) Intégrons donc l'égalité précédente : par linéarité $\int_0^1 S_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{k=n}(-1)^k\int_0^1 x^k dx = \sum\limits_{k=0}^{k=n}\dfrac{(-1)^k}{k+1}$. À droite, on a $\int_0^1 \dfrac{1}{1+x} + \int_0^1 \dfrac{(-1)^n x^{n+1}}{1+x}dx = [\ln(1+x)]_0^1 + (-1)^n\int_0^1 \dfrac{x^{n+1}}{1+x}dx = \ln 2 + (-1)^n\int_0^1 \dfrac{x^{n+1}}{1+x}dx$.

   (c) On va effectuer une intégration par parties en posant $v(x) = \ln(x+1)$ et $u'(x) = x^n$, donc $u(x) = \dfrac{1}{1+x}$ et $v'(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$. On obtient $U_n = \left[\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\ln(1+x)\right]_0^1 - \dfrac{1}{n+1}\int_0^1 \dfrac{x^{n+1}}{1+x} = \dfrac{\ln 2}{n+1} - \dfrac{(-1)^n}{n+1}\left(\sum\limits_{k=0}^{k=n}\dfrac{(-1)^k}{k+1} - \ln 2\right)$, ce qui donne bien la formule annoncée. L'expression de $\ln(2)$ ne découle pas immédiatement de la formule précédente, mais du fait que ce qui se trouve dans la grosse parenthèse ($\ln(2)$ compris) tend vers 0. En effet, $\int_0^1 \dfrac{x^{n+1}}{1+x}\,dx \leq \int_0^1 x^{n+1}\,dx = \dfrac{1}{n+2}$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x^{n+1}}{1+x}\,dx = 0$ (l'intégrale étant par ailleurs évidemment positive). Comme cette intégrale est égale à $\ln(2) - \sum\limits_{k=0}^{k=n}\dfrac{(-1)^k}{k+1}$, on en déduit que $\ln(2) = \lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{(-1)^k}{k+1}$.

Exercice 4

1. On calcule $AF = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ puis $AFA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$; $AG = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ puis $AGA = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 12 \end{pmatrix}$ et $AH = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ puis $AHA = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$
2. Une matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ appartient à $\mathcal{S}_2$ si $b = c$, donc

$S_2 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \text{Vect}(F, G, H)$. Les trois matrices formant manifestement une famille libre (une combinaison linéaire des trois aura du mal à s'annuler), c'est une base de S_2.

3. (a) D'après la question précédente, si $S \in \mathcal{S}_2$, $S = \alpha F + \beta G + \gamma H$, donc $u(S) = \alpha AFA + \beta AGA + \gamma AHA$. Chacune des trois matrices AFA, AGA et AHA étant symétrique (on les a calculées plus haut), $u(S)$ l'est aussi.
   (b) La linéarité est facile à prouver : $A(\lambda S + \mu T)A = \lambda ASA + \mu ATA$. L'application u est bien linéaire de $\mathcal{S}_2$ dans lui-même.
   (c) Comme $u(F) = AFA = 4H$; $u(G) = AGA = 4G+12H$ et $u(H) = AHA = 4F+6G+9H$, la matrice recherchée est
   $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 6 \\ 4 & 12 & 9 \end{pmatrix}$.
4. Pour calculer $\ker(u - \text{id})$, il faut résoudre, pour un vecteur-colonne à trois lignes X, le système $MX = X$, c'est-à-dire $\begin{cases} & & 4z & = & x \\ & 4y & + \ 6z & = & y \\ 4x & + \ 12y & + \ 9z & = & z \end{cases}$. Celà donne directement $x = 4z$ et $y = -2z$, et la dernière équation est alors toujours vérifie, donc $\ker(u - \text{id}) = \text{Vect}((4, -2, 1))$.
   De même, pour $\ker(u + 4\,\text{id})$, on résout $\begin{cases} & & 4z & = & -4x \\ & 4y & + \ 6z & = & -4y \\ 4x & + \ 12y & + \ 9z & = & -4z \end{cases}$. Via les deux premières équations, $x = -z$ et $y = -\dfrac{3}{4}z$, et la dernière équation est alors automatiquement vérifiée. On conclut que $\ker(u + 4\,\text{id}) = \text{Vect}\left(\left(-1, -\dfrac{3}{4}, 1\right)\right)$.
   Enfin, le système $\begin{cases} & & 4z & = & 16x \\ & 4y & + \ 6z & = & 16y \\ 4x & + \ 12y & + \ 9z & = & 16z \end{cases}$ donne $z = 4x$ et $z = 2y$, donc $y = 2x$, et encore une fois la dernière équation est alors toujours vérifiée, donc $\ker(u - 16\,\text{id}) = \text{Vect}((1, 2, 4))$.
   La matrice de v devient donc par exemple diagonale dans la base suivante : $\mathcal{B} = ((4, -2, 1); (4, 3, -4); (1, 2, 4))$, avec pour coefficients diagonaux 1, -4 et 16. Pour être tout à fait rigoureux, il faudrait vérifier que la famille constituée de ces trois vecteurs est effectivement libre pour former une base de notre espace vectoriel. En notant e_1, e_2 et e_3 les trois vecteurs de la famille, supposons $\lambda e_1 + \mu e_2 + \nu e_3 = 0$, alors en applicant u à cette égalité, par linéarité et d'après les calculs précédents, $\lambda e_1 - 4\mu e_2 + 16\nu e_3 = 0$. En soustrayant à cette égalité l'équation initiale, $15\nu e_3 - 5\mu e_2 = 0$, donc $\mu e_3 = 3\nu e_2$. Or, les vecteurs e_2 et e_3 ne sont pas proportionnels, on a donc nécessairement $\mu = \nu = 0$, dont on déduit facilement $\lambda = 0$. La famille est donc libre, et constitue une base de $\mathcal{S}_2$.
5. La matrice de passage s'écrit $P = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & -4 & 4 \end{pmatrix}$. La matrice $P^{-1}MP$ est la matrice représentant v dans la base $\mathcal{B}$, c'est donc une matrice diagonale de coefficients diagonaux 1, -4 et 16 (on ne calcule surtout pas P^{-1}, ça ne sert à rien !).
6. On peut tricher un peu en constatant que $(x-1)(x+4)(x-16) = (x^2+3x-4)(x-16) = x^3 - 13x^2 - 52x + 64$. Très facilement, $(D - I)(D + 4I)(D - 16I) = 0$, donc $D^3 = 13D^2 + 52D - 64I$. On en déduit la même égalité sur M en constatant que $D = P^{-1}MP$ implique $D^2 = P^{-1}MPP^{-1}MP = P^{-1}M^2P$, et de même $D^3 = P^{-1}M^3P$. Il suffit donc de multiplier la relation sur D par P^{-1} à gauche et P à droite pour obtenir $M^3 = 13M^2 + 52M - 64I$. La relation sur u en découle immédiatement puisque u^3 est représenté dans la base (F, G, H) par M^3, u^2 par M^2 et e par I (ça c'est vrai dans n'importe quelle base).