TD n°11 : révisions pour le DS8

PTSI B Lycée Eiffel

19 avril 2013

Exercice 1

On cherche à étudier la fonction définie par $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{\ln(t)}\, dt$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Calculer la dérivée f' de la fonction f, et étudier les variations de f.
3. Déterminer la limite de f en $+\infty$, ainsi que sa branche infinie éventuelle.
4. Montrer que la fonction $\varphi : t \mapsto \dfrac{1}{\ln(t)} - \dfrac{1}{t-1}$ se prolonge par continuité en 1. En déduire la limite en 1 de la fonction f.
5. Déterminer de même $\displaystyle\lim_{x \to \frac{1}{2}} f(x)$.
6. Prouver que $\displaystyle\lim_{x \to 0} f(x) = 0$.
7. Tracer une allure de la courbe représentative de la fonction f.

Exercice 2

On considère dans tout cet exercice l'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P(X) & \mapsto & P(X+1) - P(X) \end{array} \right.$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
2. Montrer que, si $P \in \ker(f)$, alors $\forall k \in \mathbb{N}$, $P(k) = P(0)$. En déduire le noyau de f.
3. Déterminer le degré de $f(P)$ lorsque P n'est pas un polynôme constant. En déduire que $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par f.
4. Déterminer (par un calcul explicite) l'image de $f_{|\mathbb{R}_3[X]}$. Retrouver par le calcul le noyau de cette restriction.
5. On admet que plus généralement, $\mathrm{Im}(f_{|\mathbb{R}_n[X]}) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Déterminer l'image de f. L'application est-elle injective ? Surjective ? Bijective ?
6. Déterminer un polynôme P de degré 4 tel que $f(P) = X^3$. En déduire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3$ (sans utiliser, bien entendu, la formule que vous connaissez déjà).

Exercice 3

On considère la famille de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies sur $]-1,+\infty[$ par $f_n(x) = x^n \ln(1+x)$, et on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(t)\, dt$. On note également h_n la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par $h_n(x) = n\ln(1+x) + \dfrac{x}{1+x}$.

1. Étudier les variations puis le signe des fonctions h_n (on distinguera éventuellement le cas $n=1$).
2. En déduire les variations des fonctions f_n.
3. Déterminer trois réels a, b, c tels que $\forall x \in [0,1]$, $\dfrac{x^2}{x+1} = ax + b + \dfrac{c}{x+1}$, et en déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\, dx$.
4. Montrer que $I_1 = \dfrac{1}{4}$.
5. Montrer que la suite (I_n) est monotone, et prouver sa convergence (sans chercher à déterminer sa limite).
6. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq I_n \leq \dfrac{\ln 2}{n+1}$, et en déduire la limite de la suite (I_n).
7. Pour $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*\backslash\{1\}$, on pose $S_n(x) = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k$.
   (a) Montrer que $S_n(x) = \dfrac{1}{1+x} + \dfrac{(-1)^n x^{n+1}}{1+x}$.
   (b) En déduire que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln 2 + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\, dx$.
   (c) En utilisant une intégration par parties dans le calcul de I_n, montrer que $I_n = \dfrac{\ln 2}{n+1} + \dfrac{(-1)^n}{n+1}\left(\ln 2 - \left(1 - \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{(-1)^k}{k+1} + \cdots + \dfrac{(-1)^n}{n+1}\right)\right)$. En déduire une expression de $\ln(2)$ comme limite d'une somme « simple ».

Exercice 4

Dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on note $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $G = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $H = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On note $\mathcal{S}_2$ l'ensemble des matrices carrées symétriques d'ordre 2.

1. Calculer les produits AFA, AGA, AHA.
2. Montrer que $\mathcal{S}_2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et que (F,G,H) est une base de $\mathcal{S}_2$, que l'on notera désormais $\mathcal{B}$.
3. On note u l'application qui à chaque matrice S de $\mathcal{S}_2$, associe la matrice $u(S) = ASA$.
   (a) Montrer que $\forall S \in \mathcal{S}_2$, $u(S) \in \mathcal{S}_2$.
   (b) Montrer que u est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{S}_2$.
   (c) Donner la matrice M de u dans la base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{S}_2$.
4. Déterminer les noyaux $\ker(u - \mathrm{id})$; $\ker(u + 4\,\mathrm{id})$ et $\ker(u - 16\,\mathrm{id})$. En déduire une base de $\mathcal{S}_2$ dans laquelle la matrice de u est diagonale.
5. Déterminer la matrice de passage P entre la base $\mathcal{B}$ et la base construite à la question précédente. Que vaut la matrice $D = P^{-1}MP$?
6. Montrer que $M^3 = 13M^2 + 52M - 64I$ puis que $u^3 = 13u^2 + 52u - 64\,\mathrm{id}$.