TD n°10 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

29 mars 2013

Problème 1 : Méthode de Newton

I. Un résultat de point fixe.

1. L'existence d'une solution a déjà été vue en exemple en cours, c'est une application du théorème des valeurs intermédiaires. On pose $h(x) = g(x) - x$, comme l'intervalle $[a; b]$ est stable par g, on peut dire que $g(a) \geq a$, soit $h(a) \geq 0$, et $g(b) \leq b$, soit $h(b) \leq 0$. De plus, la fonction g étant contractante, elle est Lipschitzienne donc continue, et h également. On peut bien appliquer le théorème des valeurs intermédiaires pour affirmer l'existence d'un réel $\alpha \in [a; b]$ tel que $h(\alpha) = 0$, c'est-à-dire $g(\alpha) = \alpha$. Reste à prouver l'unicité de la solution. Supposons donc que l'équation admette une deuxième solution β. La fonction étant contractante, il existe une constante $k < 1$ telle que $|g(\alpha) - g(\beta)| \leq k|\beta - \alpha|$. Mais comme $g(\alpha) = \alpha$ et $g(\beta) = \beta$, on se retrouve avec l'inégalité $|\beta - \alpha| \leq k|\beta - \alpha|$, ce qui est incompatible avec la condition $k < 1$. La solution est donc unique.
2. Considérons une telle suite récurrente. L'intervalle $[a; b]$ étant stable par g, tous les termes de la suite appartiendront à $[a; b]$: c'est vrai pour u_0 par hypothèse, et si $u_n \in [a; b]$, alors $u_{n+1} = g(u_n) \in [a; b]$. On peut alors appliquer l'hypothèse de contractance à u_n et à α pour obtenir l'inégalité $|g(u_n) - g(\alpha)| \leq k|u_n - \alpha|$, soit $|u_{n+1} - \alpha| \leq k|u_n - \alpha|$. Prouvons alors par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq k^n|u_0 - \alpha|$. C'est trivialement vrai au rang 0, et en supposant la propriété vraie au rang n, en appliquant la contractance puis l'hypothèse de récurrence, on trouver $|u_{n+1} - \alpha| \leq k|u_n - \alpha| \leq k \times k^n|u_0 - \alpha| \leq k^{n+1}|u_0 - \alpha|$. Puisque $k < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} k^n = 0$ et, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n \to +\infty} |u_n - \alpha| = 0$. Celà signifie exactement que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \alpha$.
3. En utilisant l'inégalité triangulaire sur une somme télescopique, on peut écrire $|u_{n+p} - u_n| = \left|\sum_{i=0}^{p-1} u_{n+i+1} - u_{n+i}\right| \leq \sum_{i=0}^{p-1} |u_{n+i+1} - u_{n+i}|$. Or, par le même genre de récurrence que dans la question précédente, $|u_{n+i+1} - u_{n+i}| \leq k^i|u_{n+1} - u_n|$. On peut donc écrire $|u_{n+p} - u_n| \leq \sum_{i=0}^{p-1} k^i|u_{n+1} - u_n| = \dfrac{1 - k^p}{1 - k}|u_{n+1} - u_n|$ en reconnaissant une somme géométrique. On peut passer à la limite l'inégalité précédente : $\lim\limits_{p \to +\infty} |u_{n+p} - u_n| = |\alpha - u_n|$ par continuité de la valeur absolue, et $\lim\limits_{p \to +\infty} \dfrac{1 - k^p}{1 - k} = \dfrac{1}{1 - k}$ puisque $k < 1$. On obtient $|\alpha - u_n| \leq \dfrac{1}{1 - k}|u_{n+1} - u_n| \leq \dfrac{k^n}{1 - k}|u_1 - u_0|$ en combinant avec l'inégalité $|u_{n+1} - u_n| \leq k^n|u_1 - u_0|$ démontrée précédemment.
4. Le taux d'accroissement de g en α est donné par $\tau(h) = \dfrac{g(\alpha + h) - g(\alpha)}{h}$. Or, par contractance de la fonction g, on sait que $|g(\alpha + h) - g(\alpha)| \leq k|h|$. On en déduit que $|\tau(h)| \leq k$ quelle que soit la valeur de h, inégalité conservée par passage à la limite pour obtenir $|g'(\alpha)| \leq k$. De plus, $\dfrac{u_{n+1} - \alpha}{u_n - \alpha} = \dfrac{g(u_n) - g(\alpha)}{u_n - \alpha}$, qui a bien pour limite $g'(\alpha)$ puisque u_n tend vers α.

Méthode de Newton

1. Les hypothèses assurent que la fonction f esffectue une bijection de $[a;b]$ vers $[f(a);f(b)]$, avec $0 \in [f(a);f(b)]$, puisque les deux valeurs sont supposées de signe contraire, donc 0 admet bien un unique antécédent par f.
2. La tangente en question a pour équation $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. Lorsqu'elle coupe l'axe des abscisses, $y = 0$, ce qui se produit si $f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) = 0$, soit $x = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$.
3. La fonction est bien définie en supposant que f' ne s'annule pas. De plus, f est supposée $\mathcal{C}^2$, donc f' est $\mathcal{C}^1$, et la fonction g également par théorèmes généraux. On calcule $g(\alpha) = \alpha - \dfrac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} = \alpha$ puisque $f(\alpha) = 0$ (donc α est un point fixe de la fonction g). De plus, $g'(x) = 1 - \dfrac{f'^2(x) - f(x)f''(x)}{f'^2(x)} = 1 - 1 + \dfrac{f(x)f''(x)}{f'^2(x)} = \dfrac{f(x)f''(x)}{f'^2(x)}$. On en déduit que $g'(\alpha) = 0$.
4. La fonction étant supposée concave, sa courbe est située en-dessous de chacune de ses tangentes. Prouvons par récurrence la propriété $P_n : a \leq u_n \leq \alpha$. C'est évidemment vrai pour $u_0 = a$. Supposons-le pour u_n, alors $u_{n+1} = u_n - \dfrac{f(u_n)}{f'(u_n)} \geq u_n$, puisque $f'(u_n)$ est toujours strictement positif, et que f est négative sur l'intervalle $[a;\alpha]$ auquel appartient u_n. Nous venons de montrer en passant que la suite est croissante, et on en déduit que $u_{n+1} \geq u_n \geq \alpha$. Par ailleurs, la courbe étant sous la tangente tracée depuis u_n, et cette tangente coupant l'axe des abscisses en u_{n+1}, $f(u_{n+1}) \leq 0$. Ce qui prouve que $u_{n+1} \leq \alpha$. La suite étant croissante et majorée, elle converge. Or, α est l'unique point fixe de la fonction g (être point fixe de g est équivalent à être solution de l'équation $f(x) = 0$), donc la suite ne peut converger que vers α.
5. La fonction g étant $\mathcal{C}^1$, sa dérivée g' est continue. Par ailleurs, $g'(\alpha) = 0$, comme on l'a vu plus haut. Il suffit alors d'appliquer la définition de la continuité (donc de la limite) avec $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$ par exemple pour trouver un intervalle autour de α sur lequel $|g'(x)| < \varepsilon$. Quitte à prendre l'intersection de cet intervalle avec $[a;b]$, le voisinage en question sera inclus dans $[a;b]$. Notons par exemple cet intervalle $]\alpha - \eta; \alpha + \eta[$. La dérivée g' étant majorée par $\dfrac{1}{2}$ sur cet intervalle, on peut appliquer l'IAF pour trouver $|g(\alpha - \eta) - g(\alpha)| \leq \dfrac{1}{2}|\alpha - \eta - \alpha|$, soit $|g(\alpha - \eta) - \alpha| \leq \dfrac{1}{2}\eta$. Autrement dit, $g(\alpha - \eta) \in \left[\alpha - \dfrac{1}{2}\eta; \alpha + \dfrac{1}{2}\eta\right] \subset I$. On effectue le même calcul pour $g(\alpha + \eta)$. Ah mince, ça ne suffit pas, car on ne connait pas les variations de g. Peu importe, le même calcul est valable pour tout autre nombre inclus dans l'intervalle (dont la distance à α sera plus petite que η). Montrons enfin que g est contractante sur I : on l'a en fait déjà fait ! En appliquant l'IAF, $|g(z) - g(y)| \leq \dfrac{1}{2}|y - z|$ pour tous z et y dans l'intervalle I. Toutes les hypothèses de la première partie sont vérifiées, on peut en conclure la convergence des suites récurrentes vers le points fixe α.

Problème 2 : Exponentielle de matrices

I. Exponentielle d'une matrice carrée d'ordre 3.

1. Appliquons donc l'algorithme du pivot à la matrice P :

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \\ L_3 \leftrightarrow L_2 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_3 \leftarrow 3L_3 + L_1$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ 0 & -3 & -3 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \qquad L_1 \leftarrow 3L_1 + L_2$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 6 & -12 & -18 \\ 0 & -3 & -3 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} L_1 \leftarrow L_1/6 \\ L_2 \leftarrow -L_2/3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

La matrice P est inversible, d'inverse $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

2. (a) On a $PA = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, puis $T = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

   (b) On obtient $T^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, puis $T^3 = 0$, donc $\forall n \geq 3$, $T^n = 0$.

3. En effet, on prouve par récurrence que $A^n = PT^nP^{-1}$: c'est vrai pour $n = 1$ car $A = P(P^{-1}AP)P^{-1} = PTP^{-1}$, et le supposant vrai au rang n, alors $A^{n+1} = A^nA = (PT^nP^{-1})(PTP^{-1}) = PT^{n+1}P^{-1}$. Pour $n \geq 3$, on a bien $A^n = P \times 0 \times P^{-1} = 0$.

4. (a) Calculons donc $E(t)E(t') = \left(I + tA + \frac{t^2}{2}A^2\right)\left(I + t'A + \frac{t'^2}{2}A^2\right) = I + t'A + \frac{t'^2}{2}A^2 + tA + tt'A^2 + \frac{t^2}{2}A^2 = I + (t+t')A + \frac{t'^2 + 2tt' + t^2}{2}A^2 = E(t+t')$ (tous les termes faisant intervenir des puissances de A supérieures ou égales à 3 ont été supprimés au vu de la question précédente).

(b) Comme $E(t)E(-t) = E(t-t) = E(0) = I$, on en déduit que $E(t)$ est inversible, d'inverse $E(-t) = I - tA + \dfrac{t^2}{2}A^2$.

(c) En utilisant toujours le résultat de la question 4.a), on prouve que $E(t)^n = E(nt)$ (par exemple par récurrence : c'est vrai pour $n = 1$, et en le supposant vrai au rang n, $(E(t))^{n+1} = (E(t))^n E(t) = E(nt)E(t) = E(nt+t) = E((n+1)t))$, donc $E(t)^n = I + ntA + \dfrac{n^2t^2}{2}A^2$.

II. Exponentielle d'une matrice carrée d'ordre 2.

1. Notons $X = \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}$. L'équation $BX = X$ se traduit par le système suivant : $\left\{ \begin{array}{rcrcl} & - & z & = & x \\ 2x & + & 3z & = & z \end{array} \right.$, système qui n'est pas de Cramer et a pour solution tous les couples $\{(x; -x) \mid x \in \mathbb{R}\}$. De même en posant $Y = \begin{pmatrix} y \\ t \end{pmatrix}$, on ramène l'équation $BY = 2Y$ au système $\left\{ \begin{array}{rcrcl} & - & t & = & 2y \\ 2y & + & 3t & = & 2t \end{array} \right.$, qui n'est pas de Cramer non plus et admet pour solutions les couples $\{(y; -2y) \mid y \in \mathbb{R}\}$.
2. D'après la question précédente, en posant par exemple $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, on aura $BQ = QD$ (puisque dans le produit BQ, la première colonne de Q est laissée identique, et sa deuxième colonne multipliée par 2, ce qui correspond bien à un produit à droite par la matrice D), donc $Q^{-1}BQ = D$ en supposant Q inversible. Elle l'est effectivement : le pivot ne nécessite que deux étapes $L_2 \leftarrow -L_1 - L_2$ puis $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$, ce qui donne $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.
3. Puisque l'énoncé donne le résultat, on peut éviter le calcul de QD^nQ^{-1} (qui n'est cependant pas bien compliqué) et procéder par récurrence : pour $n = 0$, la matrice proposée est bien égale à l'identité. Supposons la formule vraie au rang n, alors $B^{n+1} = B^n \times B = \begin{pmatrix} 2-2^n & 1-2^n \\ 2^{n+1}-2 & 2^{n+1}-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2^{n+1} & 2^n - 2 + 3 - 3 \times 2^n \\ 2^{n+2}-2 & 2 - 2^{n+1} + 3 \times 2^{n+1} - 3 \end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix} 2-2^{n+1} & 1-2^{n+1} \\ 2^{n+2}-2 & 2^{n+2}-1 \end{pmatrix}$, ce qui est bien la formule attendue.
4. Par définition, $a_n(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} \frac{t^k}{k!}(B^k)_{11} = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{t^k}{k!}(2-2^k)$. De même, en reprenant le résultat de la question précédente, $b_n(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} \frac{2(2t)^k - 2t^k}{k!}$, $c_n(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} \frac{t^k - (2t)^k}{k!}$ et $d_n(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} \frac{2(2t)^k - t^k}{k!}$. Pour déterminer les limites, il faut simplement connaitre le résultat suivant $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} = e^t$ (il est vrai qu'on ne l'a pas encore vraiment vu ensembles cette année). On calcule alors $a_n(t) = 2\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(2t)^k}{k!}$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n(t) = 2e^t - e^{2t}$; de même, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} b_n(t) = 2e^{2t} - 2e^t$; $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} c_n(t) = e^t - e^{2t}$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} d_n(t) = 2e^{2t} - e^t$.
5. (a) Il suffit manifestement de poser $E_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ et $E_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

   (b) Un peu de calcul donne $E_1^2 = E_1$; $E_2^2 = E_2$ et $E_1E_2 = E_2E_1 = 0$.

   (c) Au vu des calculs effectués dans la première partie du problème, on peut deviner que l'inverse de $E(t)$ sera $E(-t)$. Vérifions-le : $E(t)E(-t) = (e^tE_1 + e^{2t}E_2)(e^{-t}E_1 + e^{-2t}E_2) = e^te^{-t}E_1^2 + e^{2t}e^{-2t}E_2 = E_1 + E_2 = I$ (les simplifications utilisent les résultats de la question précédente). On a donc bien $(E(t))^{-1} = E(-t)$.