TD n°10 : révisions pour le DS7

PTSI B Lycée Eiffel

29 mars 2013

Problème 1 : Méthode de Newton

I. Un résultat de point fixe.

Soit g une fonction contractante sur un intervalle $[a;b]$. On suppose de plus que l'intervalle $[a;b]$ est stable par la fonction g.

1. Montrer que l'équation $g(x) = x$ a une unique solution sur l'intervalle $[a;b]$, que nous noterons désormais α.
2. Montrer que tout suite récurrence définie par $u_0 \in [a;b]$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = g(u_n)$ converge vers α.
3. Montrer que, quels que soient les entiers n et p, $|x_{n+p} - x_n| \leq \dfrac{1-k^p}{1-k}|x_{n+1} - x_n|$. En déduire que $|x_n - \alpha| \leq \dfrac{k^n}{1-k}|x_1 - x_0|$.
4. Montrer que, si g est dérivable en α, alors $|g'(\alpha)| \leq k$, et que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_{n+1}-\alpha}{x_n - \alpha} = g'(\alpha)$ (lorsque $x_n - \alpha$ ne s'annule plus à partir d'un certain rang).

Méthode de Newton

On considère désormais une fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a;b]$. On suppose que f est croissante et que $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$. Le but de la méthode est de fournir des valeurs approchées de la solution de l'équation $f(x) = 0$.

1. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet effectivement une unique solution α sur $]a;b[$.
2. Soit $x_0 \in [a;b]$, déterminer l'abscisse du point d'intersection de l'axe des abscisses avec la tangente à $\mathcal{C}_f$ en x_0.
3. On pose $g(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$, prouver que g est $\mathcal{C}^1$, et calculer $g(\alpha)$ et $g'(\alpha)$.
4. On suppose uniquement dans cette question que f est concave. Montrer que la suite définie par $u_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = g(u_n)$ est bie définie, croissante, majorée par α, et converge vers α.
5. Dans le cas général, justifier l'existence d'un voisinage I de α sur lequel $|g'(x)| < 1$. Montrer que ce voisinage est stable par g, et que g est contractante sur I. En déduire que si $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = g(u_n)$, la suite (u_n) converge vers α.

Problème 2 : Exponentielle de matrices

I. Exponentielle d'une matrice carrée d'ordre 3.

Soient A et P les matrices définies par $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que la matrice P est inversible et déterminer P^{-1}.
2. On pose $T = PAP^{-1}$.
   (a) Calculer la matrice T.
   (b) Calculer T^2, T^3, puis T^n pour tout entier naturel $n \geqslant 3$.
3. En déduire que $\forall n \geq 3,\ A^n = 0$.
4. Pour tout réel t, on définit la matrice $E(t)$ par $E(t) = I + tA + \dfrac{t^2}{2}A^2$.
   (a) Montrer que $\forall (t, t') \in \mathbb{R}^2,\ E(t)E(t') = E(t + t')$.
   (b) Pour tout t réel, calculer $E(t)E(-t)$. En déduire que la matrice $E(t)$ est inversible et déterminer son inverse en fonction de I, A, A^2 et t.
   (c) Pour tout t réel et pour tout entier naturel n, déterminer $(E(t))^n$ en fonction de I, A, A^2, t et n.

II. Exponentielle d'une matrice carrée d'ordre 2.

Soient B et D les matrices définies par $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Pour tout entier naturel n non nul, et pour tout réel t, on définit la matrice $E_n(t)$ par $E_n(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} B^k$. On note ses coefficients $a_n(t)$, $b_n(t)$, $c_n(t)$ et $d_n(t)$.

1. Déterminer toutes les matrices $X \in \mathcal{M}_{21}(\mathbb{R})$ vérifiant $MX = X$, puis toutes les matrices $Y \in \mathcal{M}_{21}(\mathbb{R})$ vérifiant $MY = 2Y$.
2. En déduire une matrice Q d'ordre 2 inversible telle que $Q^{-1}BQ = D$, et préciser son inverse.
3. Pour tout entier naturel n, montrer que $B^n = \begin{pmatrix} 2 - 2^n & 1 - 2^n \\ 2^{n+1} - 2 & 2^{n+1} - 1 \end{pmatrix}$.
4. Exprimer $a_n(t)$, $b_n(t)$, $c_n(t)$ et $d_n(t)$ à l'aide de sommes, puis déterminer leurs limites.
5. On note $E(t)$ la matrice dont les coefficients sont les limites de ceux de $E_n(t)$.
   (a) Déterminer deux matrices E_1 et E_2 telles que pour tout t réel on ait : $E(t) = e^t E_1 + e^{2t} E_2$.
   (b) Calculer E_1^2, E_2^2, E_1E_2 et E_2E_1.
   (c) En déduire que pour tout t réel, $E(t)$ est inversible et déterminer son inverse.