TD n°1 : fonctions

PTSI B Lycée Eiffel

7 septembre 2012

Exercice 1

Étudier le plus complètement possible les fonctions suivantes :

- $f(x) = x\ln(x+1)$
- $g(x) = \dfrac{x^2-3}{x+2}$
- $h(x) = \cos(2x) - 2\cos(x)$

Exercice 2

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on définit sur $[1; +\infty[$ la fonction f_n par $f_n(x) = \sqrt{x+1}e^{-nx}$, et on note $\mathcal{C}_n$ sa courbe représentative.

1. Étudier la fonction f_1, et dresser son tableau de variations.
2. Calculer la dérivée f_n' de la fonction f_n. En déduire que la fonction f_n admet un maximum global sur son domaine de définition, dont on donnera la valeur. Quelles sont les limites de l'abscisse et de la valeur du maximum lorsque n tend vers $+\infty$?
3. Déterminer $\lim\limits_{x \to -1} f_n'(x)$. Que peut-on en déduire sur la courbe $\mathcal{C}_n$?
4. Montrer que toutes les courbes $\mathcal{C}_n$ admettent deux points communs que l'on précisera, ainsi qu'une asymptote horizontale commune.
5. Calculer l'équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_n$ en son point d'abscisse 0.
6. Déterminer la position relative de $\mathcal{C}_n$ et de $\mathcal{C}_{n+1}$.
7. Tracer dans un même repère une allure des courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$.

Exercice 3

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = x+1-(2x+1)\ln x$ et $g(x) = \dfrac{\ln x}{x^2+x}$.

1. Étudier le plus complètement possible la fonction f. On notera α l'unique réel vérifiant $f(x) = 0$. Donner une valeur approchée de α.
2. Déterminer les variations de g et calculer $g(\alpha)$ en fonction de α.
3. Déterminer les limites de g et tracer sa courbe représentative, ainsi que sa tangente au point de la courbe d'abscisse 1.
4. On note, pour tout réel $\lambda \geqslant 1$, $I(\lambda) = \displaystyle\int_1^\lambda g(x)\,dx$. Montrer que $I(\lambda) \leqslant \displaystyle\int_1^\lambda \frac{\ln x}{x^2}\,dx$.
5. Calculer cette dernière intégrale et en déduire une majoration de $I(\lambda)$.