NOM :
Prénom :

Interrogation Écrite n°8 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

17 mai 2013

1. Il suffit de remplacer x par x^2 dans le DL de e^x, qu'on peut par ailleurs limiter à l'ordre 3 pour obtenir un DL de f à l'ordre 6 : $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$, donc $e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^5)$ (le terme suivant est en x^6).
2. Un produit de DL usuels, à mener à l'ordre 5 chacun, puis on ne garde que les termes d'ordre au plus 5 : $g(x) = \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right)\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right) = x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{24} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{12} + \frac{x^5}{120} + o(x^5) = x - \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)$.
3. En appliquant le DL de $(1+x)^\alpha$ avec $\alpha = \frac{1}{2}$, on trouve $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} + \frac{7x^5}{256} + o(x^5)$. On en déduit, en remplaçant x par $-x$, que $\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} - \frac{7x^5}{256} + o(x^5)$, puis en additionnant que $h(x) = 2 - \frac{x^2}{4} - \frac{5x^4}{64} + o(x^5)$.
4. Commençons par écrire $i(x) = (1+x)^x = e^{x\ln(1+x)}$. Comme $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)$, $x\ln(1+x) = x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3} - \frac{x^5}{4} + o(x^5)$. On peut maintenant composer avec le DL de l'exponentielle pour trouver $i(x) = 1 + x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3} - \frac{x^5}{4} + \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3} - \frac{x^5}{4}\right)^2 + o(x^5)$. Inutile d'aller plus loin, il ne restera aucun terme d'ordre inférieur ou égal à 5. On va d'ailleurs tout développer en ne gardant que les termes utiles : $i(x) = 1 + x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3} - \frac{x^5}{4} + \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^5$ (seul le premier double produit ne dépasse pas le degré 5), soit $i(x) = 1 + x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{5x^4}{6} - \frac{3x^5}{4} + o(x^5)$.
5. Commençons par calculer $\frac{1}{1 + (x + x^2)} = 1 - (x+x^2) + (x+x^2)^2 - (x+x^2)^3 + (x+x^2)^4 - (x+x^2)^5 + o(x^5) = 1 - x - x^2 + x^2 + 2x^3 + x^4 - x^3 - 3x^4 - 3x^5 + x^4 + 4x^5 - x^5 + o(x^5) = 1 - x + x^3 - x^4 + o(x^5)$. Ne reste plus qu'à faire le produit par $1 + x^2$: $j(x) = (1 - x + x^3 - x^4 + o(x^5))(1 + x^2) = 1 - x + x^3 - x^4 + x^2 - x^3 + x^5 + o(x^5) = 1 - x + x^2 - x^4 + x^5 + o(x^5)$.