# Interrogation Écrite n°7

PTSI B Lycée Eiffel

5 arvil 2013

1. La définition de famille génératrice est évidemment dans le cours (mais si, vous savez, le cours qui n'est pas encore en ligne). Pour savoir si la famille donnée est libre, on part de l'égalité $a(1,-3,1)+b(2,1,-1)+c(5,-1,-1)=(0,0,0)$, ce qui nous amène à résoudre le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} a & + & 2b & + & 5c & = & 0 \\ -3a & + & b & - & c & = & 0 \\ a & - & b & - & c & = & 0 \end{array}\right.$. La somme des deux dernières équations donne $-2a-2c=0$, soit $c=-a$. En substituant dans la première équation, on trouve alors $2b-4a=0$, et dans la deuxième $-2a+b=0$. Ces deux équations étant équivalentes, le système n'est pas de Cramer et la famille n'est pas libre. Par exemple, $a=1$, $b=2$ et $c=-1$ constitue une solution non triviale du système. Autrement dit, $(1,-3,1)+2(2,1,-1)=(5,-1,-1)$.

2. Vérifions donc que, si $(P,Q)\in\mathbb{R}_3[X]^2$, $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$, $f(\lambda P+\mu Q)=\lambda f(P)+\mu f(Q)$. Celà revient simplement à dire que $(\lambda P+\mu Q)(1)=\lambda P(1)+\mu Q(1)$, ce qui est vrai, et $(\lambda P+\mu Q)'(1)=\lambda P'(1)+\mu Q'(1)$, ce qui découle des propriétés élémentaires de la dérivation.

   Pour déterminer le noyau de $f$, écrivons $P=aX^3+bX^2+cX+d$. On a alors $P(1)=P'(1)=0$ si et seulement si $a+b+c+d=3a+2b+c=0$. On obtient donc les conditions $c=-3a-2b$, puis $d=-a-b-c=2a+b$. On en déduit que $\ker(f)=\{aX^3+bX^2-(3a+2b)X+2a+b\mid(a,b)\in\mathbb{R}^2\}=\mathrm{Vect}(X^3-3X+2;X^2-2X+1)$. Pour l'image, le plus simple est de calculer les images des polynômes consituant la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$. Ainsi, $f(1)=(1,1)$ ; $f(X)=(1,1)$ ; $f(X^2)=(1,2)$ et $f(X^3)=(1,3)$. Autrement dit, $\mathrm{Im}(f)=\mathrm{Vect}((1,1);(1,1);(1,2);(1,3))$. Le deuxième vecteur $(1,1)$ est évidemment inutile. de plus, $(1,2)-(1,1)=(0,1)\in\mathrm{Im}(f)$ ; et $(1,1)-(0,1)=(1,0)\in\mathrm{Im}(f)$, donc $\mathrm{Im}(f)$ contient les deux vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On a donc $\mathrm{Im}(f)=\mathbb{R}^2$.

   On constate que $(X-1)^2=X^2-2X+1\in\ker(f)$, c'est un des deux vecteurs qu'on a obtenu pour notre base de $\ker(f)$.De plus, $X(X-1)^2=X^3-2X^2+X=(X^3-3X+2)-2(X^2-2X+1)\in\ker(f)$ puisque c'est une combinaison linéaire de ses deux vecteurs de base. Réciproquement, $X^3-3X+2=2(X-1)^2+2(X-1)^2\in\mathrm{Vect}((X-1)^2,X(X-1)^2)$ donc $\ker(f)=\mathrm{Vect}((X-1)^2,X(X-1)^2)$. Ce qui revient à dire que $\ker(f)=\{(aX+b)(X-1)^2\mid(a,b)\in\mathbb{R}^2\}$, ce qui correspond aux polynômes de degré 3 admettant 1 comme racine double, donc exactement ceux vérifiant $P(1)=P'(1)=0$.

3. On considère l'application $f:\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (2y-2z,x+y-2z,x-y) \end{array}\right.$.

   (a) Calculons $f(\lambda(x,y,z)+\mu(x',y',z'))=f(\lambda x+\mu x',\lambda y+\mu y',\lambda z+\mu z')=(2\lambda y+2\mu y'-2\lambda z-2\mu z',\lambda x+\mu x'+\lambda y+\mu y'-2\lambda z-2\mu z',\lambda x+\mu x'-\lambda y-\lambda y')=\lambda(2y-2z,x+y-2z,x-y)+\mu(2y'-2z',x'+y'-2z',x'-y')=\lambda f(x,y,z)+\mu f(x',y',z')$. L'application $f$ est bien une application linéaire.

   (b) Le noyau est constitué des triplets solutions du système $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} & & 2y & - & 2z & = & 0 \\ x & + & y & - & 2z & = & 0 \\ x & - & y & & & = & 0 \end{array}\right.$. Les équations extrêmes donnent immédiatement $x=y=z$, en reportant dans la deuxième on trouve alors $0=0$ qui est toujours vérifié donc $\ker(f)=\{(x,x,x)\mid x\in\mathbb{R}\}=$

$\text{Vect}((1,1,1))$. Pour l'image, on peut calculer les images des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ : $f(1,0,0) = (0,1,1)$ ; $f(0,1,0) = (2,1,-1)$ et $f(0,0,1) = (-2,-2,0)$. Comme $(2,1,-1) = -(-2,-2,0) - (0,1,1)$, on peut l'oublier et conclure que $\text{Im}(f) = \text{Vect}((0,1,1),(-2,-2,0)) = \text{Vect}((0,1,1),(1,1,0))$. L'application n'est donc pas injective (le noyau contient d'autres vecteurs que le vecteur nul) ni surjective (le vecteur $(1,0,0)$ par exemple n'appartient pas à l'image, on ne peut pas l'écrire comme combinaison linéaire de $(1,1,0)$ et $(0,1,1)$). A fortiori, $f$ n'est pas bijective.

(c) Commençons par prouver que $\ker(f) \cap \text{Im}(f) = \{0\}$. Soit donc un vecteur $u$ appartenant à la fois à $\ker(f)$ et à $\text{Im}(f)$. On peut alors écrire $u$, d'une part sous la forme $(x,x,x)$ pour un certain réel $x$, d'autre part comme combinaison linéaire $a(0,1,1)+b(1,1,0) = (b, a+b, a)$. On doit donc avoir à la fois $x = a$, $x = b$ et $x = a+b$, ce qui n'est possible que si $x = a = b = 0$, soit $u = 0$.

Montrons maintenant que $\ker(f) + \text{Im}(f) = \mathbb{R}^3$. Soit donc $u = (x,y,z)$, on cherche trois réels $a$, $b$ et $c$ tels que $u = a(1,1,1) + b(1,1,0) + c(0,1,1)$, ce qui se traduit par le système $\begin{cases} a + b = x \\ a + b + c = y \\ a + c = z \end{cases}$. En soustrayant la première et la troisième ligne du système à la deuxième, on obtient immédiatement $c = y - x$ et $b = y - z$. Ensuite, $a = x - b = x - y + z$. On peut donc écrire n'importe quel vecteur de l'espace comme somme d'un vecteur du noyau et d'un vecteur de l'image de $f$. ces deux sous-espaces sont bien supplémentaires.

(d) La question précédente nous permet d'affirmer que $(x,y,z) = (x-y+z)(1,1,1) + (y-z)(1,1,0) + (y-x)(0,0,1)$, avec le premier terme de la somme de droite appartenant à $\ker(f)$, et les deux suivants à $\text{Im}(f)$. La projection sur $\text{Im}(f)$ parallèlement à $\ker(f)$ donne donc $p(x,y,z) = (y-z)(1,1,0) + (y-x)(0,1,1) = (y-z, 2y-x-z, y-x)$. On vérifie facilement si on le souhaite que $p^2 = p$.

(e) Calculons donc : $f^2(x,y,z) = f(f(x,y,z)) = (2(x+y-2z) - 2(x-y), 2y - 2z + x + y - 2z - 2(x-y), 2y - 2z - x - y + 2z) = (4y - 4z, -x + 5y - 4z, -x + y)$ ; puis $f^3(x,y,z) = (2(-x+5y-4z) - 2(-x+y), 4y - 4z - x + 5y - 4z - 2(-x+y), 4y - 4z + x - 5y + 4z) = (8y - 8z, x + 7y - 8z, x - y)$. Il ne reste plus qu'à vérifier que $f^3(x,y,z) - f^2(x,y,z) + 2f(x,y,z) = (8y-8z, x+7y-8z, x-y) - (4y-4z, -x+5y-4z, -x+y) - (4y-4z, 2x+2y-4z, 2x-2y) = (0,0,0)$, ce qui est vrai.

(f) Calculons $r \circ r = \dfrac{1}{36}(f^2 + f) \circ (f^2 + f) = \dfrac{1}{36}(f^4 + 2f^3 + f^2)$, Comme $f^3 = f^2 + 2f$, $f^4 = f \circ (f^2 + 2f) = f^3 + 2f^2 = 3f^2 + 2f$, et $r^2 = \dfrac{1}{36}(3f^2 + 2f + 2f^2 + 4f + f^2) = \dfrac{1}{36}(6f^2 + 6f) = \dfrac{1}{6}(f^2 + f) = r$, donc $r$ est un projecteur. De même, $s^2 = \dfrac{1}{9}(f^2 - 2f) \circ (f^2 - 2f) = \dfrac{1}{9}(f^4 - 4f^3 + 4f^2) = \dfrac{1}{9}(3f^2 + 2f - 4f^2 - 8f + 4f^2) = \dfrac{1}{9}(3f^2 - 6f) = \dfrac{1}{3}(f^2 - 2f) = s$, donc $s$ est également un projecteur. De plus, $f \circ r = \dfrac{1}{6}(f^3 + f^2) = \dfrac{1}{6}(2f^2 + 2f) = \dfrac{2}{6}(f^2 + f) = 2r$, et $f \circ s = \dfrac{1}{3}(f^3 - 2f^2) = \dfrac{1}{3}(-f^2 + 2f) = -s$.

(g) Prouvons par récurrence la propriété $P_n$ : $f^n = 2^n r + (-1)^n s$. Au rang 1, on a $2r - s = \dfrac{1}{3}(f^2 + f) - \dfrac{1}{3}(f^2 - 2f) = \dfrac{1}{3}(3f) = f$, donc $P_1$ est vraie. Supposons que $P_n$ est vraie, alors d'après les résultats de la question précédente, $f^{n+1} = f \circ f^n = f \circ (2^n r + (-1)^n s) = 2^n f \circ r + (-1)^n f \circ s = 2^{n+1} r + (-1)^{n+1} s$. On en déduit que $f^n = \dfrac{2^n}{6}(f^2 + f) + \dfrac{(-1)^n}{3}(f^2 - 2f) = \dfrac{2^{n-1} + (-1)^n}{3} f^2 + \dfrac{2^{n-1} - 2(-1)^n}{3} f$, soit $f^n(x,y,z) = \dfrac{1}{3}((2^{n-1} + (-1)^n)(4y - 4z) + (2^{n-1} - 2(-1)^n)(2y - 2z), \dots)$, qu'on peut simplifier si on a du temps à perdre.