NOM :
Prénom :

Interrogation Écrite n°7

PTSI B Lycée Eiffel

5 arvil 2013

Tous les calculs doivent apparaitre sur la feuille.

1. Rappeler ce qu'est une famille génératrice dans un espace vectoriel. Déterminer si, dans $\mathbb{R}^3$, la famille $((1,-3,1);(2,1,-1),(5,-1,-1))$ est libre.

2. Montrer que l'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}^2 \\ P & \mapsto & (P(1), P'(1)) \end{array} \right.$ est une application linéaire. Déterminer son noyau et son image. Vérifier que $\ker(f) = \text{Vect}((X-1)^2, X(X-1)^2)$, et expliquer ce résultat.

3. On considère l'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (2y-2z, x+y-2z, x-y) \end{array} \right.$.
   (a) Montrer que f est une application linéaire (en revenant vraiment à la définition).
   (b) Déterminer l'image et le noyau de f. L'application f est-elle injective ? Surjective ? Bijective ?
   (c) Montrer que $\ker(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont supplémentaires.
   (d) Soit p la projection sur $\text{Im}(f)$ parallèlement à $\ker(f)$, donner l'expression de $p(x,y,z)$.
   (e) Calculer $f^2(x,y,z)$ et $f^3(x,y,z)$, et vérifier que $f^3 - f^2 - 2f = 0$.
   (f) On pose $r = \dfrac{1}{6}(f^2+f)$ et $s = \dfrac{1}{3}(f^2-2f)$, montrer que r et s sont des projecteurs, et que $f \circ r = 2r$ et $f \circ s = -s$.
   (g) Montrer que, $\forall n \geq 1$, $f^n = 2^n r + (-1)^n s$. En déduire l'expression de $f^n(x,y,z)$.