Interrogation Écrite n°6 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

27 février 2013

1. Comme d'habitude, je vous renvoie au cours.
2. On peut écrire $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ -2 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ (les coefficients fiagonaux de A se retrouvent dans la partie symétrique, pour les autres, la matrice symétrique contient la moyenne de chacun des coeffients et de son symétrique par rappor à la diagonale, et la partie antisymétrique l'écart entre cette moyenne et le coefficient).
3. On calcule donc $BC = \begin{pmatrix} 11 & 7 \\ 5 & -11 \end{pmatrix}$ et $CB = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -9 \\ 5 & 12 & 4 \\ -9 & -18 & -9 \end{pmatrix}$.
4. On peut écrire $D = I_3 + N$, avec $N = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, qui vérifie $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^3 = 0$. La matrice N est nilpotente, et commute évidemment avec I_3, on peut utiliser la formule du binôme de Newton pour obtenir $D^n = (N+I)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k I^{n-k}$. Comme on a $D^k = 0$ pour tous les entiers supérieurs ou égaux à 3, $D^n = I + nN + \frac{n(n-1)}{2} N^2 = \begin{pmatrix} 1 & -n & 2n + n(n-1) \\ 0 & 1 & -2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -n & n(n+1) \\ 0 & 1 & -2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
5. Appliquons bêtement l'algorithme du pivot de Gauss :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_3 \leftarrow L_3 - L_1$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} L_1 \leftarrow 2L_1 + 3L_3 \\ L_2 \leftarrow 2L_2 + L_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 6 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & -6 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} L_1 \leftarrow L_1/4 \\ L_2 \leftarrow L_2/2 \\ L_3 \leftarrow -L_3/2 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

La matrice E est donc inversible, d'inverse $E^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$