NOM :
Prénom :

Interrogation Écrite n°5

PTSI B Lycée Eiffel

16 janvier 2013

Tous les calculs doivent apparaitre sur la feuille.

1. Je vous renvoie évidemment au cours pour cette première question de cours.
2. Et pour la deuxième également.
3. Allons-y, posons $P_n : u_n > 2^n$. On constate que P_0 est vraie ($2 > 2^0 = 1$), et P_1 également ($3 > 2^1 = 2$). Supposons désormais que P_n et P_{n+1} sont vérifiées, on a donc $2u_n > 2 \times 2^n = 2^{n+1}$, et $u_{n+1} > 2^{n+1}$, d'où $u_{n+2} > 2^{n+1} + 2^{n+1} = 2^{n+2}$. La propriété P_{n+2} est donc vraie et, par principe de récurrence double, P_n est vraie pour tout entier n.

   On peut même calculer u_n puisque la suite est récurrente linéaire d'ordre 2. L'équation caractéristique est $x^2 - x - 2 = 0$, qui a pour racines (évidentes non ?) -1 et 2. On peut donc affirmer que $u_n = A(-1)^n + B2^n$, avec $u_0 = A + B = 2$, et $u_1 = -A + 2B = 3$. En additionnant les deux équations, $3B = 5$, donc $B = \frac{5}{3}$. On trouve ensuite $A = \frac{1}{3}$, donc $u_n = \frac{5 \times 2^n + (-1)^n}{3}$.
4.
   - Résolvons donc : $x^2 + 4x = 2x + 3$, soit $x^2 + 2x - 3 = 0$. Cette équation a pour discriminant $\Delta = 4 + 12 = 16$, et pour racines $a = \frac{-2-4}{2} = -3$, et $b = \frac{-2+4}{2} = 1$.
   - Remarquons qu'il faudrait tout de même vérifier que u_n ne peut jamais être égal à a, ce qui peut se prouver par récurrence (le seul antécédent de a par f étant a lui-même). On calcule ensuite $v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 3} = \frac{\frac{2u_n+3}{u_n+4} - 1}{\frac{2u_n+3}{u_n+4} + 3} = \frac{2u_n + 3 - u_n - 4}{u_n + 4} \times \frac{u_n + 4}{2u_n + 3 + 3u_n + 12} = \frac{u_n - 1}{5u_n + 15} = \frac{1}{5}v_n$. La suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$.
   - Comme $v_0 = \frac{u_0 - 1}{u_0 + 3} = -\frac{1}{3}$, on a donc $v_n = -\frac{1}{3 \times 5^n}$. Reste à en déduire la valeur de u_n. Puisque $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 3}$, $v_n u_n + 3v_n = u_n - 1$, soit $u_n(v_n - 1) = -1 - 3v_n$, ou encore $u_n = \frac{1 + 3v_n}{1 - v_n}$. Il ne reste plus qu'à remplacer : $u_n = \frac{1 - \frac{1}{5^n}}{1 + \frac{1}{3 \times 5^n}} = \frac{3 \times 5^n - 3}{3 \times 5^n + 1}$. Sous la première forme, comme $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{5^n} = 0$ (suite géométrique de raison comprise entre -1 et 1), un calcul élémentaire prouve que $\lim_{n \to +\infty} u_n = 1$.