

NOM :  
Prénom :

## Interrogation Écrite n°5

PTSI B Lycée Eiffel

16 janvier 2013

Tous les calculs doivent apparaître sur la feuille.

1. Rappeler tout ce que vous savez sur les suites adjacentes (sans démonstration), ainsi que la définition de  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ , où  $l \in \mathbb{R}$ .
2. Donner la démonstration de l'unicité de la limite d'une suite.
3. Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 = 2$ ,  $u_1 = 3$  et  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$ . Montrer par récurrence double que,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n > 2^n$ . En déduire la limite de la suite  $(u_n)$ .
4. On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 0$  et  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = \frac{2u_n + 3}{u_n + 4}$ . On note également  $f(x) = \frac{2x + 3}{x + 4}$ .
  - Résoudre l'équation  $f(x) = x$ . On note  $a$  la plus petite solution et  $b$  la plus grande.
  - On pose  $v_n = \frac{u_n - b}{u_n - a}$ . Montrer que  $(v_n)$  est une suite géométrique.
  - En déduire l'expression de  $(u_n)$  en fonction de  $n$ . La suite  $(u_n)$  converge-t-elle ?