Interrogation Écrite n°3

PTSI B Lycée Eiffel

19 octobre 2012

1. Voir le cours.
2. Il s'agit, une fois obtenues les solutions de l'équation homogène de la forme $Ke^{-A(x)}$, de chercher une solution particulière de l'équation complète en posant $y_p(x) = K(x)e^{-A(x)}$.
3. L'équation homogène associée $y' - 3y = 0$ a pour solution générale Ke^{3x}. On peut ici chercher directement une solution particulière de la forme $y(x) = (ax + b)e^{2x}$. On aura alors $y'(x) = ae^{2x} + 2(ax + b)e^{2x} = (2ax + a + 2b)e^{2x}$, donc $y' - 3y = (2ax + a + 2b - 3ax - 3b)e^{2x} = (-ax + a - b)e^{2x}$. Cette expression sera égale à $(3x + 1)e^{2x}$ si $a = -3$ et $a - b = 1$, soit $b = -4$. Une solution particulière de l'équation est donc $y_p(x) = (-3x - 4)e^{2x}$, et les solutions de l'équation complète sont les fonctions $y(x) = (-3x - 4)e^{2x} + Ke^{3x}$.
4. On va résoudre l'équation sur $\mathbb{R}^{+*}$ (elle n'est de toute façon définie que sur $\mathbb{R}_+$ à cause de la racine carrée) et normaliser : $y' - \dfrac{3}{2x}y = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. L'équation homogène associée $y' - \dfrac{3}{2x}y = 0$ admet pour solutions les fonctions de la forme $Ke^{\frac{3}{2}\ln(x)} = Kx^{\frac{3}{2}} = Kx\sqrt{x}$. On peut par ailleurs constater que la fonction $y_p(x) = -\dfrac{\sqrt{x}}{2}$ est une solution évidente de l'équation complète : $2xy_p' - 3y = \dfrac{2x}{-4\sqrt{x}} + \dfrac{3}{2}\sqrt{x} = -\sqrt{x}$. Les solutions de l'équation complète sont donc les fonctions $y(x) = -\dfrac{\sqrt{x}}{2} + Kx\sqrt{x}$. Aucune de ces fonctions n'est dérivable en 0 (à cause de la racine carrée, le terme en $x\sqrt{x}$ est quant à lui dérivable), donc il n'y a pas de solution qu'on puisse prolonger par continuité en 0. Pour avoir $y(1) = 1$, on doit avoir $-\dfrac{1}{2} + K = 1$, soit $K = \dfrac{3}{2}$, l'unique solution du problème de Cauchy est la fonction $y(x) = \left(\dfrac{3}{2}x - \dfrac{1}{2}\right)\sqrt{x}$.

   Pour ceux qui n'auraient pas vu la solution évidente, on peut toujours faire varier la constante : on cherche $y_p(x) = K(x) \times x^{\frac{3}{2}}$, donc on a $y_p'(x) = K'(x)x^{\frac{3}{2}} + \dfrac{3}{2}K(x)\sqrt{x}$, soit $2xy' - 3y = 2K'(x)x^{\frac{5}{2}} + 3K(x)x^{\frac{3}{2}} - 3K(x)x^{\frac{3}{2}} = 2K'(x)x^{\frac{5}{2}}$. On veut que cette expression soit égale à $\sqrt{x}$, soit $K'(x) = \dfrac{1}{2x^2}$. On peut par exemple prendre $K(x) = -\dfrac{1}{2x}$, ce qui donne $y_p(x) = -\dfrac{1}{2x} \times x^{\frac{3}{2}} = -\dfrac{1}{2}\sqrt{x}$. On retrouve exactement notre solution évidente.
5. Normalisons l'équation : $y' + \dfrac{x-2}{x}y = \dfrac{x-2}{x}$, qu'on va résoudre séparement sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$. L'équation homogène associée $y' + \left(1 - \dfrac{2}{x}\right)y = 0$ a pour solutions les fonctions de la forme $Ke^{-x+2\ln(x)} = K\dfrac{x^2}{e^x}$ (valables sur chacun des deux intervalles). La fonction constante égale à 1 est une solution évidente de l'équation complète, donc les solutions sont de la forme $y(x) = 1 + K\dfrac{x^2}{e^x}$. Ces fonctions ont toutes pour limite 1 quand x tend vers 0 (que ce soit à droite ou à gauche). En 0, l'équation différentielle stipule que $0 \times y'(0) - 2y(0) = -2$ soit $y(0) = 1$, ce qui est donc toujours vérifié. Reste à voir si les fonctions recollées sont dérivables en 0. On

a $y'(x) = \frac{2Kx}{e^x} - \frac{x^2}{e^x}$, qui tend vers 0 (à gauche comme à droite) quelle que soit la valeur de K. On peut donc recoller comme on veut les solutions, en prenant des valeurs de K différentes de chaque côté de 0. Par exemple, la fonction f définie par $f(x) = 1 + \frac{x^2}{e^x}$ quand $x \geq 0$ et $f(x) = 1 - \frac{x^2}{e^x}$ quand $x \leq 0$ est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation.