NOM :
Prénom :

Interrogation Écrite n°2

PTSI B Lycée Eiffel

2 octobre 2012

1. Cf cours.
2. Il est tout de même plus simple de commencer par mettre z sous forme exponentielle : $|z| = \sqrt{16+16\times 3} = \sqrt{64} = 8$, donc $z = 8\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 8e^{-i\frac{\pi}{3}}$. Les racines cubiques de z ont donc pour module $\sqrt[3]{(8)} = 2$, et pour arguments $\theta = -\frac{\pi}{9}\left[\frac{2\pi}{3}\right]$. On a donc pour racines $z_1 = 2e^{-i\frac{\pi}{9}}$; $z_2 = 2e^{i(-\frac{\pi}{9}+\frac{2\pi}{3})} = 2e^{i\frac{5\pi}{9}}$ et $z_3 = 2e^{i(-\frac{\pi}{9}+\frac{4\pi}{3})} = 2e^{i\frac{11\pi}{9}} = 2e^{-i\frac{7\pi}{9}}$.
3. Les formules d'Euler sont dans le cours, et $\sin^4(\theta) = \left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^4 = \frac{1}{16}(e^{4i\theta} - 4e^{2i\theta} + 6 - 4e^{-2i\theta} + e^{-4i\theta}) = \frac{1}{16}(2\cos(4\theta) - 4\cos(2\theta) + 6) = \frac{1}{8}\cos(4\theta) - \frac{1}{4}\cos(2\theta) + \frac{3}{8}$.
4. Commençons donc par calculer le discriminant de cette équation : $\Delta = (4-2i)^2 + 16i(1+i) = 16 - 16i - 4 + 16i - 16 = -4 = (2i)^2$. Inutile donc de s'embêter à faire des calculs ignobles, $\delta = 2i$, et les deux racines sont $z_1 = \frac{-4+2i-2i}{2(1+i)} = \frac{-2(1-i)}{2} = -1+i$, et $z_2 = \frac{-4+4i}{2(1+i)} = \frac{-2(1-i)^2}{2} = -(1-i)^2 = 2i$. Finalement, $\mathcal{S} = \{-1+i; 2i\}$.
5. Le plus simple est de calculer $\overline{z}z'$ pour chaque couple de vecteurs. Commençons par $\overline{2i-3}(4+6i) = (-3-2i)(4+6i) = -12-8i-18i+12 = -26i \in i\mathbb{R}$ donc les deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux. On enchaine avec $(-3-2i)(5i-2) = -15i+6+10+4i$, qui n'est ni réel ni imaginaire pur. Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{w}$ ne sont donc ni colinéaires ni orthogonaux. Inutile de tester $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$, on n'obtendra rien : s'ils étaient colinéaires, $\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{u}$ seraient orthogonaux, et vice-versa. On enchaine donc directement avec $(-3-2i)\left(5 - \frac{10}{3}i\right) = -15 + 10i - 10i - \frac{20}{3}$. Ce nombre étant réel, les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{z}$ sont colinéaires. On en déduit sans calcul que $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{z}$ sont orthogonaux.