NOM :
Prénom :

Interrogation Écrite n°1 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

13 septembre 2012

1. Je n'ai pas un prof de maths génial, je ne suis donc pas en PTSI B.
2. C'est du cours.
3. C'est également du cours, démontré en posant $f(x) = \ln(xy) - \ln(x) - \ln(y)$ et en démontrant que f est constamment nulle.
4. Inutile de s'embêter avec le domaine de définition (si ce n'est la positivité de x pour que la racine carrée ait un sens), on cherche à résoudre $x + \sqrt{x} - 1 > 1$, soit $x + \sqrt{x} - 2 > 0$. En posant $X = \sqrt{x}$, on se ramène à $X^2 + X - 2$, trinome ayant pour discriminant $\Delta = 1 + 8 = 9$, et admettant pour racines $X_1 = \dfrac{-1-3}{2} = -2$ et $X_2 = \dfrac{-1+3}{2} = 1$. Le trinome est positif à l'extérieur des racines, soit lorsque $x \geq 1$ (les valeurs inférieures à -2 étant non pertinentes ici). Conclusion : $\mathcal{S} = [1; +\infty[$.
5. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$, et peut s'écrire sous la forme $f(x) = e^{x^2 \ln(x)}$. Elle est dérivable, de dérivée $f'(x) = (x + 2x\ln(x))e^{x^2\ln(x)} = x(1 + 2\ln(x))e^{x^2\ln(x)}$. Cette dérivée est du signe de $1 + 2\ln(x)$ et s'annule en particulier pour $x = e^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$ (valeur comprise entre 0 et 1). La fonction f atteint à cet endroit un minimum de valeur $f(e^{-\frac{1}{2}}) = e^{-\frac{1}{2e}}$ (valeur comprise entre 0 et 1 également). De plus, par croissance comparée, $\lim\limits_{x \to 0} x^2 \ln(x) = 0$, donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$; et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ (pas de difficulté de ce côté-là). Toujours en utilisant la croissance comparée, on peut également constater que $\lim\limits_{x \to 0} f'(x) = 0$, ce qui prouve l'existence d'une tangente horizontale à la courbe représentative de f à l'origine.