Devoir surveillé n°8 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

20 avril 2013

Exercice 1

1. En effectuant le changement de variable $u = 1 - t$, on aura $t = 1 - u$ donc $dt = -du$, et $I_{a,b} = \int_1^0 -(1-u)^a u^b\ du = \int_0^1 u^b(1-u)^a\ du = I_{b,a}$. Les deux intégrales sont donc égales.

2. Calculons : $I_{a,0} = \int_0^1 t^a\ dt = \left[\frac{t^{a+1}}{a+1}\right]_0^1 = \frac{1}{a+1}$.

3. On va effectuer une IPP en posant $u'(t) = t^a$ et $v(t) = (1-t)^b$, soit $u(t) = \frac{t^{a+1}}{a+1}$ et $v'(t) = -b(1-t)^{b-1}$, ce qui donne $I_{a,b} = \left[\frac{t^{a+1}}{a+1}(1-t)^b\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{t^{a+1}}{a+1} b(1-t)^{b-1}\ dt = \frac{b}{a+1} I_{a+1,b-1}$ (le crochet étant nul en 0 comme en 1 si $a \geqslant 0$ et $b \geqslant 1$).

4. Successivement, $I_{a,b} = \frac{b}{a+1} I_{a+1,b-1} = \frac{b(b-1)}{(a+1)(a+2)} I_{a+2,b-2} = \dots$ $= \frac{b(b-1)(b-2)\dots 1}{(a+1)(a+2)\dots(a+b)} I_{a+b,0} = \frac{b!}{(a+1)(a+2)\dots(a+b)(a+b+1)} = \frac{a!b!}{(a+b+1)!}$. Les plus courageux écriront une récurrence propre pour la première partie du calcul.

5. Posons donc, intelligemment, $x = \sin^2(t)$ (qui est bien une bijection sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$). On peut alors écrire $dx = 2\sin(t)\cos(t)\ dt$, donc $\sin^5(t)\cos^7(t)\ dt = \sin^4(t)\cos^6(t)\sin(t)\cos(t)\ dt = x^2(1-x)^3\frac{dx}{2}$. Finalement, $I = \frac{1}{2}\int_0^1 x^2(1-x)^3\ dx = \frac{1}{2} I_{2,3} = \frac{1}{2}\frac{2! \times 3!}{6!} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{60} = \frac{1}{120}$.

6. (a) Faisons le changement de variable $t = \frac{u}{n}$, on aura bien sûr $dt = \frac{du}{n}$, et $F_n(k) = \int_0^1 (1-t)^n (nt)^k \times n\ dt = n^{k+1}\int_0^1 (1-t)^n t^k\ dt = n^{k+1} I_{n,k}$.

   (b) À partir du rang k, on aura donc certainement $F_n(k) \leqslant \int_0^n \left(1 - \frac{u}{n+1}\right)^{n+1} u^k\ du$. Mais attention, les bornes dans $F_{n+1}(k)$ sont 0 et $n+1$, et pas 0 et n, il faut donc ajouter que les fonctions intégrées sont positives sur $[0;1]$ pour en déduire que $\int_0^n \left(1 - \frac{u}{n+1}\right)^{n+1} u^k\ du \leqslant F_{n+1}(k)$. La suite $(F_n(k))$ est donc croissante à partir du rang k.

   (c) Passons sous forme exponentielle : $\left(1 - \frac{k}{n}\right)^n = e^{n\ln(1-\frac{k}{n})}$. Comme $\lim_{n \to +\infty} \frac{k}{n} = 0$, on peut dire que $\ln\left(1 - \frac{k}{n}\right) \sim -\frac{k}{n}$, donc on déduit facilement la limite demandée, qui vaut e^{-k}. La suite étant croissante à partir du rang k, c'est-à-dire à partir du rang 1 ici puisqu'on va appliquer le résultat à $u \in [0;1]$ (on se demande bien qui a eu l'idée de mettre un k à cet endroit-là), on peut dire que $\left(1 - \frac{u}{n}\right)^n \leqslant e^{-u}$, dont découle la majoration par intégration de l'inégalité.

(d) Il suffit de dire que $\lim_{u\to+\infty} e^{-u}u^{k+2} = 0$ (c'est de la croissance comparée). Il existe donc certainement un A à partir duquel $e^{-u}u^{k+2} \leqslant 1$ (on applique la définition de la limite avec $\varepsilon = 1$), d'où l'inégalité demandée. On peut alors écrire, au moins lorsque $n \geqslant A$, que $F_n(k) \leqslant \int_0^n e^{-u}u^k\ du \leqslant \int_0^A e^{-u}u^k\ du + \int_A^n e^{-u}u^k\ du$. Cette deuxième intégrale peut être majorée, au vu de ce qui précède, par $\int_A^n \frac{1}{u^2}\ du = \left[-\frac{1}{u}\right]_A^n = -\frac{1}{n} + \frac{1}{A} \leqslant \frac{1}{A}$. La majoration demandée en découle.

(e) On a vu plus haut que la suite était croissante à partir d'un certain rang, la question précédente prouve qu'elle est majorée (le membre de droite ne dépend plus de n), d'après le théorème de convergence monotone, elle converge.

(f) Reprenons la première relation démontrée : $F_n(1) = n^2 I_{1,n} = n^2\frac{n!}{(n+2)!} = \frac{n^2}{(n+1)(n+2)} \sim \frac{n^2}{n^2}$, donc $F(n) = \lim_{n\to+\infty} F_n(k) = 1$.

(g) Commençons par constater que $F_n(k+1) = n^{k+2}I_{k+1,n} = n^{k+2}\frac{k+1}{n+1}I_{k,n+1}$ en utilisant la relation $I_{a,b} = \frac{b}{a+1}I_{a+1,b-1}$ avec $a = k$ et $b = n+1$. Autrement dit, $F_n(k+1) = \frac{n(k+1)}{n+1}n^{k+1}I_{k,n+1} = (k+1)\left(\frac{n}{n+1}\right)^{k+2}(n+1)^{k+1}I_{k,n+1} = (k+1)\left(\frac{n}{n+1}\right)^{k+2}F_{n+1}(k)$. Quand on fait tendre n vers $+\infty$, k étant constant, $\lim \left(\frac{n}{n+1}\right)^{k+2} = 1$, donc on obtient bien $F(k+1) = (k+1)F(k)$. Par une récurrence triviale, on prouve alors que $F(k) = k!$. C'est vrai pour $k = 1$ d'après le calcul de la question précédente, et en le supposant vrai au rang k, alors $F(k+1) = (k+1)k! = (k+1)!$.

Exercice 2

1. La fonction $t \mapsto t + \sin(t)$ a pour dérivée $1 + \cos(t)$, qui est positive sur $\mathbb{R}$ (strictement sauf pour les réels vérifiant $\cos(t) = -1$, qui sont en nombre fini sur tout intervalle borné), donc elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Comme par ailleurs elle s'annule évidemment en 0, elle sera strictement négative sur $\mathbb{R}^{-*}$ et strictement positive sur $\mathbb{R}^{+*}$. En particulier, $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}^*$.
2. La fonction f est définie en x si, $\forall t \in [x, 2x]$, $t \neq 0$. C'est le cas si $x > 0$ (dans ce cas, $[x; 2x] \subset \mathbb{R}^{+*}$) et si $x > 0$. Pour $x = 0$, on peut convenir que $f(0)$ ou ne rien convenir du tout, on dira donc que $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$.
3. On devrait commencer à avoir l'habitude de ce genre de calcul de dérivée. En notant G une primitive quelconque de g, on a $f(x) = G(2x) - G(x)$, donc $f'(x) = 2g'(2x) - g(x) = \frac{2}{2x+\sin(2x)} - \frac{1}{x+\sin(x)}$. Mettons donc au même dénominateur : $f'(x) = \frac{2(x+\sin(x)) - (2x+\sin(2x))}{(2x+\sin(2x))(x+\sin(x))} = \frac{2\sin(x) - \sin(2x)}{(2x+\sin(2x))(x+\sin(x))}$. D'après l'étude réalisée dans la première question, les deux facteurs du dénominateur sont soit tous les deux négatifs (si $x < 0$), soit tous les deux positifs, donc leur produit est positif. La dérivée est donc du signe de $2\sin(x) - \sin(2x) = 2\sin(x) - 2\sin(x)\cos(x) = 2\sin(x)(1 - \cos(x))$. Comme $1 - \cos(x) \geqslant 0$, $f'(x)$ est du signe de $\sin(x)$. La fonction f est donc croissante sur chaque intervalle de la forme $[2k\pi; (2k+1)\pi]$ et décroissante sur chaque intervalle de la forme $[(2k-1)\pi, 2k\pi]$, pour $k \in \mathbb{Z}$.
4. On peut faire un petit dessin, ou utiliser de façon plus rigoureuse le changement de variable $x = -t$, qui donne $\int_{-a}^{-b} h(t)\ dt = \int_a^b -h(-x)\ dx = \int_a^b h(x)\ dx$. Ici, la fonction g est impaire,

donc $f(-x) = \displaystyle\int_{-x}^{-2x} g(t)\ dt = \int_{x}^{2x} g(t)\ dt = f(x)$. La fonction f est paire (ce qui est cohérent avec les variations obtenues.

5. (a) Un bête calcul : $\left| f(x) - \displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{t}\ dt \right| = \left| \int_x^{2x} \frac{1}{t+\sin(t)} - \frac{1}{t}\ dt \right| =\leqslant \int_x^{2x} \frac{|t-(t+\sin(t))|}{t(t+\sin(t))} \leqslant \int_x^{2x} \frac{1}{t(t+\sin(t))}\ dt$ puisque $|\sin(t)| \leqslant 1$.

   (b) Puisque $-1 \leqslant \sin(t) \leqslant 1$, $t + \sin(t) \geqslant t - 1$. Il suffit de prendre $t \geqslant 2$ pour avoir $t - 1 \geqslant t - \dfrac{t}{2} = \dfrac{t}{2}$.

   (c) En reprenant la majoration précédente, on aura $\forall t \geqslant A$, $\left| f(x) - \displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{t}\ dt \right| \leqslant \int_x^{2x} \frac{2}{t}^2\ dt = \left[-\frac{2}{t} \right]_x^{2x} = -\frac{2}{2x} + \frac{2}{x}$. Cette quantité tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$. D'un autre côté, $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{t}\ dt = [\ln(t)]_x^{2x} = \ln(2x) - \ln(x) = \ln(2)$. La combinaison des deux résultats permet d'affirmer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ln(2)$.

6. (a) Tout le monde sait que $\sin(t) \underset{0}{\sim} t$, donc $t + \sin(t) \underset{t\to 0}{=} t + t + o(t) \sim 2t$, et $g(t) \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{2t}$.

   (b) On calcule $g(t) - \dfrac{1}{2t} = \dfrac{\sin(t) - t}{2t(t+\sin(t))} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{-\frac{t^3}{3}}{2t(2t)} \sim -\dfrac{t}{12}$. La limite de cette différence est donc nulle, on peut prolonger u par continuité en posant $u(0) = 0$.

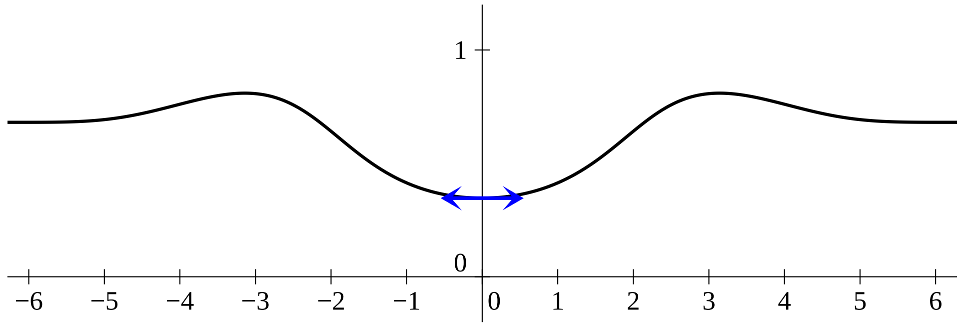
   (c) La fonction prolongée est continue sur $[-1;1]$, elle y est donc bornée d'après le théorème du maximum. Notons M le maximum de $|u|$ sur $[-1;1]$, alors $\forall x \in \left[-\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right]$, $\left| \displaystyle\int_x^{2x} u(t)\ dt \right| \leqslant \int_x^{2x} |u(t)|\ dt \leqslant \int_x^{2x} M\ dt = Mx$. On en déduit immédiatement que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \int_x^{2x} u(t)\ dt = 0$.

   (d) Il suffit d'écrire que $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} u(t) + \frac{1}{2t}\ dt \underset{x\to 0}{=} o(1) + \left[\frac{\ln|t|}{2} \right]_x^{2x} = o(1) + \frac{1}{2}(\ln(|2x|) - \ln(|x|)) = \frac{1}{2}\ln(2) + o(1)$. Autrement dit, $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{\ln(2)}{2}$. Pour savoir si le prolongement est dérivable, tentons d'appliquer le théorème du prolongement $\mathcal{C}^1$: $f'(x) = \dfrac{2\sin(x)(1-\cos(x))}{(2x+\sin(2x))(x+\sin(x))} \underset{0}{\sim} \dfrac{2x \times \frac{x^2}{2}}{4x \times 2x} \sim \dfrac{x}{6}$. La dérivée a pour limite 0 en 0, la fonction f est donc dérivable en 0 et y admet une tangente horizontale (notons que, si elle est dérivable, elle a nécessairement une tangente horizontale en 0 en tant que fonction paire).

7. On ne connait à peu près que ça de la fonction :

x	-2π		$-\pi$		0		π		2π
f	$f(-2\pi)$	$\nearrow$	$f(-\pi)$	$\searrow$	$\frac{\ln(2)}{2}$	$\nearrow$	$f(\pi)$	$\searrow$	$f(2\pi)$

On est bien évidemment complètement incapables de calculer les valeurs en π et en 2π (de l'autre côté, par parité, les valeurs sont les mêmes), on fait donc ce qu'on peut. La courbe ressemble à ça :



Problème : exemples de pseudo-inverses d'applications linéaires.

I. Quelques propriétés générales

1. Il suffit de constater que $f^{-1} \circ f \circ f^{-1} = \mathrm{id} \circ f^{-1} = f^{-1}$ et $f \circ f^{-1} \circ f = \mathrm{id} \circ f = f$. De plus, $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \mathrm{id}$, les trois propriétés sont donc vérifiées, f^{-1} est un pseudo-inverse de f.
2. Si f est pseudo-inversible, en notant B la matrice de son pseudo-inverse dans la base canonique, la matrice de $f \circ g \circ f$ sera alors ABA, on aura donc $ABA = A$. De même, $BAB = B$ et le fait que f et g commutent se traduit par $AB = BA$. Réciproquement, si une telle matrice B existe, en notant g l'application linéaire de matrice B dans la base canonique, on passera de même des relations sur les matrices à celles sur les endomorphismes.
3. Calculons : $(AB_1A)B_2 = AB_2$ puisque $AB_1A = A$, mais puisque A commute avec B_1 et B_2, on a aussi $AB_1AB_2 = B_1(AB_2A) = B_1A$. On en déduit en effet que $B_1A = AB_2$. On peut en déduire que $B_1 = B_1AB_1 = B_1(B_1A) = B_1AB_2$. De même, $B_2 = B_2AB_2 = (AB_2)B_2 = B_1AB_2$. Finalement, $B_1 = B_2$. Le pseudo-inverse est donc unique.
4. Une symétrie s est bijective (de réciproque s, puisque $s \circ s = \mathrm{id}$) donc la première question permet d'affirmer que s est pseudo-inversible, et qu'elle est son propre pseudo-inverse. Un projecteur p est en fait également son propre pseudo-inverse : $p \circ p \circ p = p \circ p = p$ (ce qui prouve simultanément les deux premières conditions !), et p commute évidemment avec lui-même.
5. On peut subtilement conjecturer que, si g est le peudo-inverse de f, g^k sera celui de f^k. En effet, puisque f et g commutent, $g^k \circ f^k \circ g^k = (g \circ f \circ g)^k = g^k$, de même dans l'autre sens, et bien entendu g^k et f^k commutent. Notons que le résultat reste vrai pour $k = 0$, où on se rend compte que id est son propre pseudo-inverse.

II. Un exemple concret.

1. On écrit simplement $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.
2. Travaillons plus simplement avec les matrices : $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 11 & 16 & 5 \\ 19 & 28 & 9 \end{pmatrix}$ puis $A^3 = \begin{pmatrix} 14 & 20 & 6 \\ 58 & 84 & 26 \\ 102 & 148 & 46 \end{pmatrix}$.
   On vérifie péniblement que $A^3 - 6A^2 + 4A = 0$, ce qui se traduit bien par $f^3 - 6f^2 + 4f = 0$. On peut factoriser pour obtenir $f \circ (f^2 - 6f + 4\,\mathrm{id}) = 0$. Si f était bijective, on pourrait alors composer par f^{-1} pour obtenir $f^2 - 6f + 4\,\mathrm{id} = 0$, ce qui n'est pas vrai puisque $A^2 - 6A + 4I = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. L'application f n'est donc pas bijective.

3. Pour déterminer la noyau, il faut résoudre $\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + 3y + z = 0 \\ 3x + 5y + 2z = 0 \end{cases}$. Une fois n'est pas coutume, une petite substitution est très efficace, la première équation donne $y = -x$, la deuxième $z = -2x - 3y = x$, et la dernière, sans grande surprise puisque l'application n'est pas bijective, s'annule. On en déduit que $\ker(f) = \{(x, -x, x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((1, -1, 1))$. Pour l'image, on calcule les images des trois vecteurs de la base canonique :
$\text{Im}(f) = \text{Vect}((1, 2, 3); (1, 3, 5); (0, 1, 2)) = \text{Vect}((1, 2, 3); (0, 1, 2))$ puisque $(1, 3, 5) = (1, 2, 3) + (0, 1, 2)$.
4. Vérifions directement que le système $(x, y, z) = a(0, 1, 2) + b(1, 2, 3) + c(1, -1, 1)$ a une unique solution. Écrivons explicitement le système : $\begin{cases} b + c = x \\ a + 2b - c = y \\ 2a + 3b + c = z \end{cases}$. La combinaison $L_3 - 2L_2$ donne $-b + 3c = z - 2y$, donc en ajoutant L_1, $4c = z - 2y + x$, soit $c = \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{4}z$. On en déduit $b = x - c = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{4}z$ puis $a = y + c - 2b = -\frac{5}{4}x - \frac{1}{2}y + \frac{3}{4}z$. La solution est unique, la famille est donc une base de $\mathbb{R}^3$.
5. Notons donc P la matrice de passage, $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Il est inutile de faire quoi que ce soit pour calculer la matrice inverse, nous l'avons déjà obtenue en résolvant le système de la question précédente ! La matrice P^{-1} est celle permettant de faire le passage de $\mathcal{B}$ vers la base canonique, autrement celle dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs de la base canonique dans $\mathcal{B}$. Il suffit de remplacer dans les formules obtenus ci-dessus pour trouver $P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.
6. La famille (e_1, e_2) est certainement une base de $\text{Im}(f)$, c'est celle que nous avions obtenue tout à l'heure. La supplémentarité de $\ker(f)$ et $\text{Im}(f)$ découle du fait que la famille $\mathcal{B}$ est une base : tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ peut s'écrire de façon unique comme somme d'un vecteur du noyau et d'un vecteur de l'image de f.
7. Deux possibilités : soit on calcule $P^{-1}AP$, qui nous donnera la matrice de f dans $\mathcal{B}$; soit on calcule directement $f(0, 1, 2)$ et $f(1, 2, 3)$ et on exprime ces deux images dans la base $\mathcal{B}$ (le troisième vecteur a une image nulle puisqu'il est dans le noyau). Ici, ça va aussi vite : $f(0, 1, 2) = (1, 5, 9) = 3 \times (0, 1, 2) + (1, 2, 3)$; et $f(1, 2, 3) = (3, 11, 19) = 5 \times (0, 1, 2) + 3 \times (1, 2, 3)$. Conclusion : $A' = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
8. Tout va bien, on a trouvé une matrice conforme à ce que dit l'énoncé. Posons donc $M = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Utilisons nos vastes connaissances sur les matrices d'ordre 2 : $\det(M) = 4$ donc la matrice M est inversible et $N = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.
9. C'est un calcul assez bêta, on constate facilement que $B'A' = A'B' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, les trois conditions pour le pseudo-inverse sont alors facilement vérifiées.
10. On peut conjecturer que $B = PB'P^{-1}$. Vérifions-le : on aura alors $BA = PB'P^{-1}PA'P^{-1} = PB'A'P^{-1}$, et de même $AB = PA'B'P^{-1}$. Puisque A' et B' commutent, ce sera aussi le cas de

A et B. De même, $BAB = PB'A'B'P^{-1} = PB'P^{-1} = B$ et $ABA = A$. Le pseudo-inverse de A est donc bien la matrice B. On calcule sans enthousiasme $PB' = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, puis $B = PB'P^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 7 & 4 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ -9 & -4 & 5 \end{pmatrix}$.

11. Dans la base $\mathcal{B}$, la matrice de p est $P^{-1}BAP = P^{-1}BPP^{-1}AP = B'A'$ qu'on a calculée plus haut. On reconnait une matrice de projection, plus précisément la matrice de la projection sur $\mathrm{Im}(f)$ parallèlement à $\ker(f)$. Du coup, aucun calcul supplémentaire à faire. Si on y tient on peut donner la matrice de p dans la base canonique : $BA = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

III. Un second exemple.

1. C'est quasiment immédiat : la matrice nulle commute avec tout le monde, y compris A, et si B et D sont deux matrices commutant avec A, alors $A(\lambda B+\mu D) = \lambda AB+\mu AD = \lambda BA+\mu DA = (\lambda B + \mu D)A$, ce qui prouve la stabilité par combinaisons linéaires.
2. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$. On calcule sans difficulté $AM = \begin{pmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $MA = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & d & e \\ 0 & g & h \end{pmatrix}$. Les deux matrices sont égales si et seulement si $d = g = h = 0$; $a = e = i$ et $f = b$. Autrement dit, $C(A) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\} = \mathrm{Vect}\left(I, A, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$.
3. Puisque le pseudo-inverse doit commuter avec la matrice A, c'est une conséquence triviale de la question précédente.
4. En repartant d'une matrice B de la forme précédente, $BA = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ puis $BAB = \begin{pmatrix} 0 & a^2 & 2ab \\ 0 & 0 & a^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Si on veut que cette matrice soit égale à B, il faut en effet avoir $a = 0$.
5. Si $a = 0$, on vient en fait de voir que $BAB = 0$, donc on devrait avoir $B = 0$, ce qui est absurde (car on ne pourra alors jamais avoir $ABA = A$). La matrice A ne peut donc pas avoir de pseudo-inverse.
6. L'application g est très facile à décrire analytiquement : $g(x, y, z) = (y, z, 0)$. Le noyau est donc assez trivialement constitué des vecteurs vérifiant $x = 0$. Si on y tient, $\ker(g) = \mathrm{Vect}((1, 0, 0))$. Tout aussi facilement, $\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Vect}((1, 0, 0); (0, 1, 0))$ en prenant les images de la base canonique. Les deux sous-espaces ne peuvent pas être supplémentaires puisqu'ils ont intersection contenant tout le noyau (une droite en l'occurence). On peut conjecturer des deux exemples précédents qu'une application linéaire est pseudo-inversible si et seulement si son noyau et son image sont en somme directe. Démonstration laissée en exercice au lecteur.