Devoir surveillé n°8

PTSI B Lycée Eiffel

20 avril 2013

Durée : 4H. Calculatrices interdites.

Exercice 1

Pour tout couple d'entiers naturels (a, b), on note $I_{a,b}$ l'intégrale $I_{a,b} = \int_0^1 t^a(1-t)^b\ dt$.

1. Comparer les valeurs de $I_{a,b}$ et $I_{b,a}$.
2. Calculer $I_{a,0}$ pour tout entier naturel a.
3. À l'aide d'une intégration par parties, déterminer une relation entre $I_{a,b}$ et $I_{a+1,b-1}$.
4. Déduire des deux questions précédentes une expression de $I_{a,b}$ à l'aide de factorielles.
5. Calculer à l'aide d'un changement de variable intelligent (c'est-à-dire un tout petit peu plus malin que $x = \sin(t)$ ou $x = \cos(t)$) et des résultats précédents $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5(t)\cos^7(t)\ dt$.
6. On pose désormais, pour tout entier naturel k, $F_n(k) = \int_0^n \left(1 - \frac{u}{n}\right)^n u^k\ du$. La valeur de k est fixée pour tous les calculs qui suivent (à l'exception de la dernière question), seul l'entier n varie.
   (a) Montrer que $F_n(k) = n^{k+1} I_{k,n}$.
   (b) En **admettant** que la suite $\left(1 - \frac{k}{n}\right)^n$ est croissante à partir du rang k, montrer que $(F_n(k))$ est également croissante à partir d'un certain rang.
   (c) Déterminer $\lim_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^n$, en déduire que $F_n(k) \leqslant \int_0^n e^{-u}u^k\ du$.
   (d) Prouver l'existence d'un réel A tel que, $\forall u \geqslant A$, $e^{-u} \leqslant \frac{1}{u^{k+2}}$.
   En déduire que $F_n(k) \leqslant \int_0^A e^{-u}u^k\ du + \frac{1}{A}$.
   (e) Démontrer enfin la convergence de la suite $(F_n(k))$ vers une valeur que l'on notera désormais $F(k)$.
   (f) Que vaut $F_n(1)$? En déduire la valeur de $F(1)$.
   (g) Montrer que, $\forall k \geqslant 0$, $F(k+1) = (k+1)F(k)$. En déduire la valeur de $F(k)$.

Exercice 2

On définit dans cet exercice une fonction f par $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} g(t)\ dt$, où $g(t) = \dfrac{1}{t+\sin(t)}$.

1. En étudiant les variations de $t \mapsto t + \sin(t)$, déterminer le signe de $t + \sin(t)$, et en déduire le domaine de définition de g.
2. Déterminer rigoureusement le domaine de définition de la fonction f.
3. Calculer f', et dresser le tableau de variations de la fonction f.
4. Expliquer pourquoi, si h est une fonction impaire, $\displaystyle\int_{-a}^{-b} h(t)\ dt = \int_a^b h(t)\ dt$. En déduire la parité de la fonction f.
5. On cherche à déterminer la limite éventuelle de f en $+\infty$.
   (a) Montrer que, $\forall x > 0$, $\left| f(x) - \displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{t}\ dt \right| \leqslant \int_x^{2x} \frac{1}{t(t+\sin(t))}\ dt$.
   (b) Justifier l'existence d'un réel A tel que, $\forall t \geqslant A$, $t + \sin(t) \geqslant \dfrac{t}{2}$.
   (c) Montrer que f admet une limite finie en $+\infty$, que l'on déterminera.
6. On cherche désormais à déterminer la limite éventuelle de f en 0.
   (a) Déterminer un équivalent simple de $g(t)$ en 0.
   (b) On pose $u(t) = g(t) - \dfrac{1}{2t}$. Montrer que g se prolonge par continuité en 0.
   (c) Justifier que u est bornée sur l'intervalle $[-1;1]$, et en déduire la valeur de $\displaystyle\lim_{x\to 0} \int_x^{2x} u(t)\ dt$.
   (d) Déterminer la limite de f en 0, peut-on prolonger f en une fonction dérivable en 0 ?
7. Tracer une allure possible de la courbe représentative de f sur l'intervalle $[-2\pi; 2\pi]$.

Problème : exemples de pseudo-inverses d'applications linéaires.

Dans tout le problème, on dit qu'une application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ est pseudo-inversible s'il existe une application linéaire $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vérifiant les conditions suivantes :

- $g \circ f \circ g = g$
- $f \circ g \circ f = f$
- $f \circ g = g \circ f$

L'application g est alors appelée pseudo-inverse de f.
Les trois parties du problème sont largement indépendantes, on peut tout à fait se lancer dans les calculs des deux dernières parties sans avoir traité la première.

I. Quelques propriétés générales

1. Montrer qu'une application bijective f est pseudo-inversible et que f^{-1} est un pseudo-inverse de f.
2. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ et A sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Montrer que f est pseudo-inversible si et seulement s'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $AB = BA$; $ABA = A$ et $BAB = B$. La matrice B sera alors appelée pseudo-inverse de la matrice A.
3. On souhaite montrer l'unicité du pseudo-inverse d'une matrice (et donc de celui d'un endomorphisme). Supposons donc qu'il existe deux matrices B_1 et B_2 vérifiant les relations de la question précédente, en calculant AB_1AB_2 de deux façons différentes, montrer que $B_1A = AB_2$, puis que $B_1 = B_2$.
4. Une symétrie est-elle toujours pseudo-inversible (si oui, donner son pseudo-inverse) ? Même question pour un projecteur.
5. Montrer que, si f est pseudo-inversible alors, pour tout entier naturel k, f^k l'est également.

II. Un exemple concret.

On considère dans cette partie l'application $f : (x, y, z) \mapsto (x + y, 2x + 3y + z, 3x + 5y + 2z)$.

1. Donner la matrice A de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Vérifier que $f^3 - 6f^2 + 4f = 0$. L'application f est-elle bijective ?
3. Déterminer le noyau et l'image de f, et donner une base de chaque.
4. On note $\mathcal{B}$ la famille constituée des trois vecteurs $e_1 = (0, 1, 2)$; $e_2 = (1, 2, 3)$ et $e_3 = (1, -1, 1)$. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
5. Déterminer la matrice de passage de la base canonique vers la base $\mathcal{B}$, et calculer son inverse P^{-1}.
6. Montrer que (e_1, e_2) est une base de $\mathrm{Im}(f)$, et vérifier que $\mathrm{Im}(f)$ et $\ker(f)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
7. Déterminer la matrice A' de f dans la base $\mathcal{B}$.
8. Vous avez du trouver à la question précédente $A' = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \gamma & \delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On note pour cette question $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$. Vérifier que M est inversible et donner son inverse $N = \begin{pmatrix} \varepsilon & \zeta \\ \eta & \theta \end{pmatrix}$.
9. Vérifier que la matrice $B' = \begin{pmatrix} \varepsilon & \zeta & 0 \\ \eta & \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est le pseudo-inverse de la matrice A'.
10. En déduire le pseudo-inverse B de la matrice A en fonction de B' et de P, puis explicitement.
11. On note p l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est BA. De quelle type d'application s'agit-il ? Déterminer ses éléments caractéristiques (noyau, image). On pourra commencer par regarder à quoi ressemble la matrice de p dans la base $\mathcal{B}$.

III. Un second exemple.

Cette partie (et les notations utilisées) sont indépendantes de la précédente. On considère désormais la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, on note g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ ayant pour matrice A dans la base canonique, et $C(A)$ l'ensemble des matrices qui commutent avec A.

1. Montrer que $C(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
2. Déterminer explicitement $C(A)$, et en donner un base.
3. On suppose désormais que la matrice A admet un pseudo-inverse B. Montrer qu'il existe trois réels (a, b, c) tels que $B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.
4. En exploitant l'égalité $B = BAB$, montrer que $\lambda = 0$.
5. En continuant à exploiter les relations entre A et B, aboutir à une contradiction, et en déduire que A n'a pas de pseudo-inverse.
6. Déterminer $\ker(g)$ et $\mathrm{Im}(g)$. Ces deux sous-espaces sont-ils supplémentaires ? Émettre une conjecture sur une condition nécessaire et suffisante pour qu'un endomorphisme admette un pseudo-inverse.