# Devoir surveillé n°7 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

30 mars 2013

## Exercice 1

1. En effet, $1+0+0=0+1+0=0+0+1=1$ donc $I\in E$ et $s(I)=1$ ; pour $J$ les sommes sont toutes identiques et égales à $1+1+1$ donc $s(J)=3$.
2. Il faut avoir $2x+y=z=z+x-1$ (les trois sommes sur les colonnes sont les mêmes, dans le désordre). La condition $z=z+x-1$ impose $x=1$, et l'autre égalité devient alors $z=y+2$. Toutes les matrices de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 1 & y \\ -1 & y+2 & 1 \\ y+2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ sont donc dans l'ensemble $E$.
3. Si $A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} a'_1 & a'_2 & a'_3 \\ b'_1 & b'_2 & b'_3 \\ c'_1 & c'_2 & c'_3 \end{pmatrix}$, alors
$AB=\begin{pmatrix} a_1a'_1+a_2b'_1+a_3c'_1 & a_1a'_2+a_2b'_2+a_3c'_2 & a_1a'_3+a_2b'_3+a_3c'_3 \\ b_1a'_1+b_2b'_1+b_3c'_1 & b_1a'_2+b_2b'_2+b_3c'_2 & b_1a'_3+b_2b'_3+b_3c'_3 \\ c_1a'_1+c_2b'_1+c_3c'_1 & c_2a'_2+c_2b'_2+c_3c'_2 & c_3a'_3+c_2b'_3+c_3c'_3 \end{pmatrix}$
La somme des termes de la première ligne correspond exactement au développement de $(a_1+a_2+a_3)(a'_1+b'_1+c'_1)=s(A)s(B)$. Des calculs très similaires prouvent que les cinq autres sommes sont identiques.
4. (a) On calcule $AJ=\begin{pmatrix} a_1+a_2+a_3 & a_1+a_2+a_3 & a_1+a_2+a_3 \\ b_1+b_2+b_3 & b_1+b_2+b_3 & b_1+b_2+b_3 \\ c_1+c_2+c_3 & c_1+c_2+c_3 & c_1+c_2+c_3 \end{pmatrix}$. Similairement, $JA=\begin{pmatrix} a_1+b_1+c_1 & a_2+b_2+c_2 & a_3+b_3+c_3 \\ a_1+b_1+c_1 & a_2+b_2+c_2 & a_3+b_3+c_3 \\ a_1+b_1+c_1 & a_2+b_2+c_2 & a_3+b_3+c_3 \end{pmatrix}$

   (b) Il suffit d'écrire l'égalité des neuf coefficients de $AJ$ et $JA$ pour constater qu'elles se ramènent aux égalités des six sommes du début de l'énoncé.

   (c) Dans le cas où $A\in E$, chacun des coefficients de $AJ$ correspondant à l'une des six sommes égales à $s(A)$, on a $AJ=\begin{pmatrix} s(A) & s(A) & s(A) \\ s(A) & s(A) & s(A) \\ s(A) & s(A) & s(A) \end{pmatrix}=s(A)J$.
5. Si $A$ est inversible, on peut multiplier l'égalité $AJ=s(A)J$ à gauche par $A^{-1}$ pour obtenir $J=s(A)A^{-1}J$. De même, comme $AJ=JA$, on aura $J=JAA^{-1}=AJA^{-1}=s(A)JA^{-1}$. Autrement dit, $A^{-1}J=JA^{-1}=\dfrac{1}{s(A)}J$ (ici, $s(A)$ ne peut être nul sinon au vu des relations obtenues on aurait $J=0$, ce qui n'est manifestement pas le cas). La caractérisation des matrices de $E$ vue précédemment permet alors d'affirmer que $A^{-1}\in E$, et que $s(A^{-1})=\dfrac{1}{s(A)}$.
6. (a) Calculons $JB=\dfrac{1}{3}s(A)J^2$, et $\dfrac{1}{3}BJ=s(A)J^2$. Les deux matrices sont égales, donc $B\in E$.

(b) On a $BC = BA - B^2 = \frac{1}{3}s(A)JA - \frac{1}{9}s(A)^2J^2 = \frac{1}{3}s(A)^2J - \frac{1}{3}s(A)^2J^2$. Comme $J^2 = 3J$, on a $BC = \frac{1}{3}s(A)^2J - \frac{1}{3}s(A)^2J = 0$. De même, $CB = 0$.

(c) On vient de voir que $B$ et $C$ commutent, on peut donc écrire, en utilisant la formule du binome de Newton, que $(B+C)^n = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} B^k C^{n-k}$. Dans cette somme, seuls le premier et le dernier terme sont non nuls (dans tous les autres, on a un produit $BC$ qui est nul), donc $(B+C)^n = B^n + C^n$. Comme $C = A - B$, cela donne $(B+A-B)^n = B^n + (A-B)^n$, ou encore $(A-B)^n = A^n - B^n$.

(d) On a $A = B + C$, où $B$ est proportionnelle à $J$. Reste donc à vérifier que $C \in F$. En effet, $CJ = AJ - BJ = s(A)J - \frac{1}{3}s(A)J^2 = s(A)J - s(A)J = 0$, de même pour $JA$. La matrice $C$ est donc bien dans $E$, avec $s(C) = 0$. Autrement dit, $C \in F$.

## Exercice 2

1. Les constantes solutions sont les réels $k$ vérifiant $k = \frac{2k}{1+k^2}$, soit $k(1+k^2) = 2k$. Soit $k = 0$, soit $1 + k^2 = 2$, donc $k = \pm 1$. Il y a donc trois fonctions constantes solutions.
2. Puisque vous n'êtes pas censés connaitre de formules de trigonométrie hyperbolique compliquées, faisons un calcul brutal : $\frac{2\,\mathrm{th}(x)}{1+\mathrm{th}(x)^2} = \frac{\frac{2e^x - 2e^{-x}}{e^x+e^{-x}}}{1 + \frac{(e^x-e^{-x})^2}{(e^x+e^{-x})^2}} = \frac{2(e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2 + (e^x + e^{-x})^2} = \frac{2(e^{2x} - e^{-2x})}{2e^{2x} + 2e^{-2x}} = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{e^{2x} + e^{-2x}} = \mathrm{th}(2x)$.
3. En remplaçant $x$ par 0, on trouve $f(0) = \frac{2f(0)}{1+f(0)^2}$, ce qui est exactement l'équation résolue à la première question. On a donc $f(0) = 0$, $f(0) = -1$ ou $f(0) = 1$.
4. On peut toujours écrire $f(x) = \frac{2f(\frac{x}{2})}{1+f(\frac{x}{2})^2}$. Si on prouve que $\frac{2t}{1+t^2}$ est toujours compris entre $-1$ et $1$ quelle que soit la valeur du réel $t$, la fonction $f$ sera donc bornée par $-1$ et $1$. On peut effectuer une étude de fonction pour obtenir l'encadrement, ou être astucieux : $(t+1)^2 \geqslant 0$ implique $2t \geqslant -t^2 - 1$, soit en divisant par $t^2 + 1$ (qui est positif), $\frac{2t}{t^2+1} \geqslant -1$. De même, comme $(t-1)^2 \geqslant 0$, on peut dire que $2t \leqslant 1 + t^2$, et en divisant à nouveau par $t^2 + 1$, on trouve cette fois-ci $\frac{2t}{t^2+1} \leqslant 1$. On a bien prouvé que $\frac{2t}{t^2+1} \in [-1;1]$, soit en posant $t = f\left(\frac{x}{2}\right)$, $f(x) \in [-1;1]$.
5. (a) La fonction th effectue une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1;1[$ (c'est du cours). Par hypothèse, $f(a) \in ]-1;1[$, donc $f(a)$ admet un (unique) antécédent $b$ par la fonction th, ce qui signifie bien que $\mathrm{th}(b) = f(a)$.

   (b) Ca sent la récurrence. La propriété est vraie au rang 0, c'est l'objet de la question précédente. Supposons donc que $\mathrm{th}\left(\frac{b}{2^n}\right) = f\left(\frac{a}{2^n}\right)$. On veut prouver la propriété au rang $n+1$, or on sait que $f\left(\frac{a}{2^n}\right) = \frac{2f(\frac{a}{2^{n+1}})}{1+(f(\frac{a}{2^{n+1}}))^2}$, et comme la fonction th vérifie également l'équation fonctionnelle, $\mathrm{th}\left(\frac{b}{2^n}\right) = \frac{2\,\mathrm{th}(\frac{b}{2^{n+1}})}{1+(\mathrm{th}(\frac{b}{2^{n+1}}))^2}$. On en déduit que $\frac{2f(\frac{a}{2^{n+1}})}{1+(f(\frac{a}{2^{n+1}}))^2} = \frac{2\,\mathrm{th}(\frac{b}{2^{n+1}})}{1+(\mathrm{th}(\frac{b}{2^{n+1}}))^2}$. Or, si $\frac{2t}{1+t^2} = \frac{2u}{1+u^2}$, on aura $2t(1+u^2) = 2u(1+t^2)$, soit $t + tu^2 - u - ut^2 = 0$, ou encore $t - u + ut(u-t) = 0$, ou encore $(t-u)(1-ut) = 0$. Ceci ne peut se produire que si $t = u$ ou $t = \dfrac{1}{u}$. En posant $t = f\left(\dfrac{a}{2^{n+1}}\right)$ et $u = \text{th}\left(\dfrac{b}{2^{n+1}}\right)$, on ne peut pas avoir $t = \dfrac{1}{u}$ puisque ces deux nombres sont strictement compris entre $-1$ et 1. La seule possibilité est donc $t = u$, ce qui prouve notre propriété au rang $n+1$ et achève la récurrence.

(c) On vient de prouver que $\dfrac{f(\frac{a}{2^n})}{\frac{a}{2^n}} = \dfrac{\text{th}(\frac{b}{2^n})}{\frac{a}{2^n}} = \dfrac{b}{a} \times \dfrac{\text{th}(\frac{b}{2^n})}{\frac{b}{2^n}}$. On reconnait dans le deuxième quotient le taux d'accroissement de la fonction th en 0 (puisque $\text{th}(0) = 0$). Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{b}{2^n} = 0$, et $\text{th}'(0) = 1$, on a donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\text{th}(\frac{b}{2^n})}{\frac{b}{2^n}} = 1$, puis $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{f(\frac{a}{2^n})}{\frac{a}{2^n}} = \dfrac{b}{a}$. On en déduit que $f\left(\dfrac{a}{2^n}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{b}{2^n}$, et en particulier que $\lim\limits_{n \to +\infty} f\left(\dfrac{a}{2^n}\right) = 0$. La fonction $f$ étant dérivable, donc continue en 0, un passage à la limite permet d'affirmer que $f(0) = 0$. On reconnait alors dans le quotient $\dfrac{f(\frac{a}{2^n})}{\frac{a}{2^n}}$ le taux d'accroissement de la fonction $f$ en 0. Comme ce quotient a pour limite $\dfrac{b}{a}$, on a $f'(0) = \dfrac{b}{a}$.

(d) Pour tous les réels $x$ pour lesquels $0 < |f(x)| < 1$, on vient de prouver que $f(x) = (bx)$, avec $\dfrac{b}{x} = f'(0)$, donc $f(x) = \text{th}(f'(0)x)$. La question était en fait mal posée, puisque le $b$ des questions précédentes dépend du choix de $a$, alors qu'ici on prouve que $f(x) = \text{th}(bx)$ pour une valeur de $b$ constante (égale à $f'(0)$). Pour montrer que l'égalité $f(x) = \text{th}(bx)$ est vraie sur $\mathbb{R}$, il faut par ailleurs ajouter que $f(x)$ ne peut jamais (sauf en 0) être égal à $-1$, 0 ou 1 pour que le raisonnement puisse être appliqué. C'est l'objet des dernières questions du problème.

6. (a) La suite est constante égale à 1, démontrons-le par récurrence. C'est vrai pour $n = 0$ par hypothèse, supposons-le vrai au rang $n$. On a alors $1 = f\left(\dfrac{a}{2^n}\right) = \dfrac{2f(\frac{a}{2^{n+1}})}{1 + (f(\frac{a}{2^{n+1}}))^2}$. Notons $t = f\left(\dfrac{a}{2^{n+1}}\right)$, on a donc $\dfrac{2t}{1+t^2} = 1$, soit $2t = 1 + t^2$ ou encore $t^2 - 2t + 1 = 0$. Cette équation ayant pour unique solution 1, on en déduit que $t = 1$, ce qui prouve notre propriété au rang $n+1$. La suite est bien constante.

(b) Par passage à la limite et en exploitant la continuité de $f$ en 0, $f(0) = 1$. On peut alors écrire le taux d'accroissement de $f$ en 0 : $\dfrac{f(x) - 1}{x}$. Or, pour $x = \dfrac{a}{2^n}$, qui a une limite nulle quand $n$ tend vers $+\infty$, ce quotient est nul, et sa limite l'est donc également. Par conséquent, $f'(0) = 0$. La fonction $f$ est alors nécessairement constante égale à 1. En effet, sinon, il existerait un $a$ pour lequel $f(a) \neq 1$. Si $f(a)$ n'est pas égal à 0 ou $-1$, on est dans le cas de la question 5, et on ne peut pas avoir $f'(0) = 0$, c'est absurde. Si $f(a) = -1$, on démontre exactement de la même façon que ce qu'on vient de faire que $f(0) = -1$ (la suite $\left(f\left(\dfrac{a}{2^n}\right)\right)$ est alors constante égale à $-1$), pas possible non plus. Enfin, si $f(a) = 0$, on va voir dans la dernière question que $f(0) = 0$. On ne donc pas avoir d'autres valeurs que 1 pour la fonction $f$. De même, s'il existe un $a$ pour lequel $f(a) = -1$, la fonction est constante égale à $-1$.

7. C'est exactement pareil. La suite $\left(f\left(\dfrac{a}{2^n}\right)\right)$ est alors nulle : en effet, c'est vrai au rang 0 par hypothèse, et si $\dfrac{2t}{1+t^2} = 0$, alors $t = 0$ (pour le coup c'est immédiat !), ce qui prouve l'hérédité. On en déduit par passage à la limite que $f(0) = 0$, et en regardant le taux d'accroissement que $f'(0) = 0$. Même raisonnement que ci-dessus pour conclure alors que $f = 0$.

# Problème

## I. Une première étude de fonction

1. La fonction $i$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0;+\infty[$, et $i'(x) = 2x + 1 - 2x\ln(x) - x = x + 1 - 2x\ln(x)$ ; $i''(x) = 1 - 2\ln(x) - 2 = -1 - 2\ln(x)$.
2. Par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to 0} x^2\ln(x) = 0$, donc $\lim\limits_{x\to 0} i(x) = 2$. La fonction est donc prolongeable par continuité en posant $i(0) = -2$. De plus, un calcul similaire donne $\lim\limits_{x\to 0} i'(x) = 1$. Le théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$ permet alors d'affirmer que $i$ est dérivable en 0, et que $i'(0) = 1$.
3. Il faut étudier le signe de $i''(x) = -1 - 2\ln(x)$. Cette expression s'annule lorsque $\ln(x) = -\dfrac{1}{2}$, c'est-à-dire pour $x = e^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$. La fonction $i$ est convexe sur $\left]0;\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right[$, et concave sur $\left]\dfrac{1}{\sqrt{e}};+\infty\right[$. L'unique point d'inflexion a pour abscisse $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$. Comme $i\left(\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right) = \dfrac{1}{e} + \dfrac{1}{\sqrt{e}} - 2 - \dfrac{1}{e} \times \left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{3}{2e} + \dfrac{1}{\sqrt{e}} - 2$, et $i'\left(\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{e}} + 1 - \dfrac{2}{\sqrt{e}} \times \left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{2}{\sqrt{e}} + 1$, l'équation de la tangente en ce point a pour équation $y = \left(\dfrac{2}{\sqrt{e}} + 1\right)\left(x - \dfrac{1}{\sqrt{e}}\right) + \dfrac{3}{2e} + \dfrac{1}{\sqrt{e}} - 2$ (on peut développer si on le souhaite, mais ça ne se simplifie pas vraiment).
4. L'étude du signe de $i''$ permet d'obtenir le tableau de variations suivant pour $i'$ :

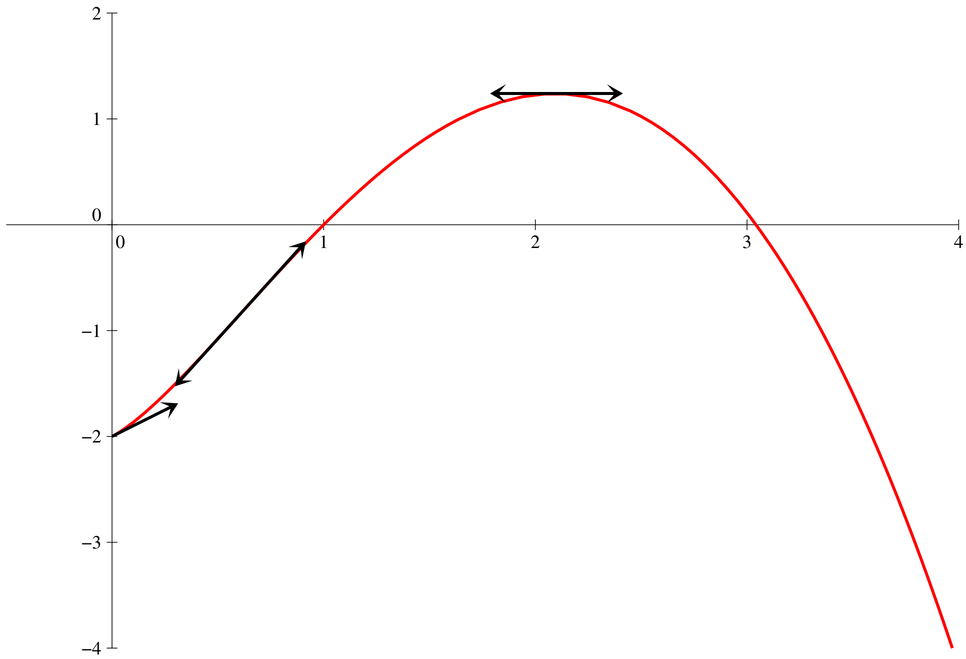
| $x$ | $0$ | | $\frac{1}{\sqrt{e}}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $i'$ | $1$ | $\nearrow$ | $\frac{2}{\sqrt{e}} + 1$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

   En effet, $i'(x) \underset{+\infty}{\sim} -2x\ln(x)$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} i'(x) = -\infty$. La fonction $i'$ est donc strictement positive sur $\left[0;\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right]$, et effectue ensuite une bijection de $\left[\dfrac{1}{e};+\infty\right[$ sur $\left]-\infty;\dfrac{2}{\sqrt{e}}+1\right]$. En particulier, il existe un unique $\alpha \in \left[\dfrac{1}{\sqrt{e}};+\infty\right[$ tel que $i'(\alpha) = 0$. Comme par ailleurs $i'(1) = 2 > 0$, et que $i'$ est strictement décroissante sur $\left[\dfrac{1}{\sqrt{e}};+\infty\right[$, on a bien $\alpha > 1$.
5. On déduit du signe de $i'$ le tableau de variations de $i$ :

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $i$ | $-2$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $i(\alpha)$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

   En effet, $i(0) = 1 + 1 - 2 - 0 = 0$, et comme $i(x) \underset{+\infty}{\sim} -x^2\ln(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} i(x) = -\infty$. Comme $\alpha > 1$, on en déduit que $i(\alpha) > 0$, et en exploitant la bijectivité de $i$ de $[\alpha;+\infty[$ sur $]-\infty;\alpha]$, on obtient l'existence d'un unique $\beta \in [\alpha;+\infty[$ tel que $i(\beta) = 0$.
6. On a déjà vu à la question précédente que $\lim\limits_{x\to+\infty} i(x) = -\infty$. De plus, $\dfrac{i(x)}{x} \underset{+\infty}{\sim} -x\ln(x)$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{i(x)}{x} = -\infty$, et la courbe de $i$ admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction $(Oy)$.
7. Pour tracer l'allure sur votre copie, puisqu'on donnait $\alpha \simeq 2$, vous pouviez calculer une valeur approchée du maximum : $i(\alpha) \simeq i(2) \simeq 4 - 4\ln(2) \simeq 1,2$. Il fallait bien entendu que la

courbe coupe l'axe des abscisses en 1 et en $\beta \simeq 3$, il fallait placer la tangente de pente 1 au point de départ $(0;-2)$ de la courbe, et placer la tangente au point d'inflexion en utilisant que $\dfrac{1}{\sqrt{e}} \simeq 0,6$ ; $i\left(\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right) \simeq -0,85$ et $i'\left(\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right) \simeq 2,2$. Sans oublier enfin la branche parabolique à respecter en $+\infty$, ce qui donne une courbe de ce type :




## II. Une deuxième étude de fonction

1. Avec un $\ln(x)$ au dénominateur de la fraction, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}_+^* \backslash \{1\}$. Mais en utilisant l'équivalent classique $\ln(x) = \ln(1+x-1) \underset{x \to 1}{\sim} x-1$, $f(x) \underset{x \to 1}{\sim} \dfrac{(x+2)(x-1)}{x(x-1)} \sim \dfrac{x+2}{x}$. Comme $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x+2}{x} = 3$, on peut en effet prolonger la fonction par continuité en posant $f(1) = 3$.
2. Par croissance comparée, $\lim\limits_{x \to 0} x\ln(x) = 0^-$, et $\lim\limits_{x \to 0} (x+2)(x-1) = -2$, donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$. Par ailleurs, $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{x^2}{x\ln(x)} \sim \dfrac{x}{\ln(x)}$, et c'est à nouveau la croissance comparée qui permet de conclure : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
3. La fonction $f$ est dérivable partout sauf éventuellement en 1 comme quotient de fonctions usuelles, et $f'(x) = \dfrac{(2x+1)(x\ln(x)) - (\ln(x)+1)(x^2+x-2)}{(x\ln(x))^2} = \dfrac{x^2\ln(x) + 2\ln(x) - x^2 - x + 2}{(x\ln(x))^2} = \dfrac{x^2+2}{(x\ln(x))^2} \times g(x)$. Comme $\dfrac{x^2+2}{(x\ln(x))^2}$ est toujours strictement positif, $f'$ est bien du signe de $g$.
4. En 1, le dénominateur de $f'(x)$ est simplement équivalent à $(\ln(x))^2$, donc à $(x-1)^2$. Regardons le numérateur, en posant pour simplifier $X = x-1$ (qui tendra donc vers 0) : $x^2\ln(x) + 2\ln(x) - x^2 - x + 2 = (X+1)^2\left(X - \dfrac{1}{2}X^2 + o(X^2)\right) + 2\left(X - \dfrac{1}{2}X^2 + o(X^2)\right) - X(X-3)$. on peut tout développer en ne gardant que les termes qui ne sont pas négligeables par rapport à $X^2$ : $X - \dfrac{1}{2}X^2 + 2X^2 + 2X - X^2 - X^2 + 3X + o(X^2) = -\dfrac{1}{2}X^2 + o(X^2)$. Quand on divise par le dénominateur qui est équivalent à $(x-1)^2 = X^2$, on trouve bien $f'(x) \underset{1}{\sim} -\dfrac{1}{2}$, donc la fonction est dérivable en 1 (théorème du prolongement $\mathcal{C}^1$), et $f'(1) = -\dfrac{1}{2}$.

5. La fonction $g$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur son domaine de définition $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée
$g'(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{(2x+1)(x^2+2) - 2x(x^2+x-2)}{(x^2+2)^2} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{2x^3+x^2+4x+2-2x^3-2x^2+4x}{(x^2+2)^2} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{x^2-8x-2}{(x^2+2)^2} = \dfrac{(x^2+2)^2 + x(x^2-8x-2)}{x(x^2+2)^2} = \dfrac{x^4+4x^2+4-x^3-8x^2-2x}{x(x^2+2)^2} = \dfrac{h(x)}{x(x^2+2)^2}$.
Le dénominateur de cette fraction étant toujours positif sur $]0;+\infty[$, $g'$ est bien du signe de $h$.

6. En effet, $h(1) = 1+1-4-2+4 = 0$ et $h(-2) = 16-8-4\times 8+4+4 = 0$. On peut donc factoriser $h$ sous la forme $h(x) = (x-1)(x+2)(ax^2+bx+c) = (x^2+x-2)(ax^2+bx+c)$. On doit donc avoir, en développant, $ax^4+(a+b)x^3+(c+b-2a)x^2+(c-2b)x-2c = x^4+x^3-4x^2-2x+4$. Par identification, on obtient les conditions $a = 1$ ; $a+b = 1$ ; $c+b-2a = -2$ ; $c-2b = -2$ et $-2c = 4$, ce qui donne la solution unique $a = 1$ ; $b = 0$ et $c = -2$. Autrement dit, $h(x) = (x-1)(x+2)(x^2-2)$. On peut alors dresser le tableau de signe de $h$ sur $]0;+\infty[$, et le tableau de variations de $g$ sur ce même intervalle :

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $\sqrt{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $h(x)$ | $4$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $0$ | $\searrow$ | $g(\sqrt{2})$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Pour remplir ce tableau, on a calculé $g(1) = 0 - \dfrac{0}{3} = 0$ ; constaté que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+x-2}{x^2+2} = -1$, donc $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = -\infty$ ; et que $\dfrac{x^2+x-2}{x^2+2} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{x^2}{x^2} = 1$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$.

7. La lecture du tableau de variations (on invoquera à nouveau le théorème de la bijection pour être très rigoureux) permet en effet de constater que $g$ s'annule une deuxième fois sur l'intervalle $[\sqrt{2};+\infty[$. Comme $g$ est négative sur $]0;\lambda]$ et positive sur $[\lambda;+\infty[$, on a le tableau de variations suivant pour $f$ :

| $x$ | $0$ | | $\lambda$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $\simeq 2,9$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

## III. Une suite récurrente

1. D'après la dernière question de la partie précédente, $f$ est, selon la valeur de $\lambda$, soit croissante, soit décroissante puis croissante sur $[2;4]$. dans les deux cas, toutes les valeurs qu'elle prend sont plus grandes que $f(\lambda)$, donc supérieures à 2 (en fait, on peut déterminer la position de $\lambda$ par rapport à 2 en calculant $g(2) = \ln(2) - \dfrac{2}{3} > 0$ ; on a donc $\lambda < 2$, et $f$ est croissante sur $[2;4]$). De plus, $f(2) = \dfrac{4}{2\ln(2)} = \dfrac{2}{\ln(2)} < 4$ car $\ln(2) > \dfrac{1}{2}$ ; et $f(4) = \dfrac{18}{4\ln(4)} = \dfrac{9}{4\ln(2)} \simeq \dfrac{9}{2,8} < 4$. On en déduit que $f([2;4]) \subset [2;4]$. On peut alors prouver par récurrence que $u_n \in [2;4]$. C'est certainement vrai pour $u_0 = 2$, et si on le suppose vrai pour $u_n$, alors $f(u_n) = u_{n+1} \in [2;4]$ au vu du calcul précédent.

2. On constate que $f(x) - x = \dfrac{i(x)}{x\ln(x)}$. On peut alors dresser le tableau de signes suivant :

| $x$ | 0 | | 1 | | $\beta$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $i(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | |
| $x\ln(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | | $+$ | |
| $f(x)-x$ | | $+$ | 2 | $+$ | 0 | $-$ | |

L'équation $f(x) = x$ admet donc pour unique solution $x = \beta$.

3. Il suffit donc de calculer $f'(2) = \dfrac{6\ln 2 - 4}{(2\ln(2))^2} \simeq \dfrac{0,2}{(2\ln(2))^2} > 0$ (peut importe la valeur exacte, puisque $f'$ est croissante sur $[2;4]$, elle atteindra sa plus grande valeur en 4) et $f'(4) = \dfrac{36\ln(2) - 18}{(4\ln(4))^2} = \dfrac{18(2\ln(2)-1)}{64(\ln(2))^2} = \dfrac{9(2\ln(2)-1)}{32(\ln(2))^2} \simeq \dfrac{3,6}{16} < \dfrac{4}{16} = \dfrac{1}{4}$. On a donc, $\forall x \in [2;4]$, $0 \leqslant f'(x) \leqslant \dfrac{1}{4}$, et a fortiori $|f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{4}$.

4. (a) Tous les élémentes permettant d'apppliquer l'IAF sont réunis : la valeur absolue de la dérivée est majorée sur $[2;4]$, $u_n \in [2;4]$, et $\beta \in [2.4]$ au vu de la valeur approchée donnée dans l'énoncé. De plus, $f(\beta) = \beta$ et $f(u_n) = u_{n+1}$, ce qui permet bien d'obtenir $|u_{n+1} - \beta| \leqslant \dfrac{1}{4}|u_n - \beta|$.

   (b) C'est la récurrence hyper classique. Pour $n = 0$, $|u_0 - \beta| = |2 - \beta| < 2$, donc la propriété est vraie au rang 0. En supposant l'inégalité vraie au rang $n$, on applique successivement le résultat donné par l'IAF et l'hypothèse de récurrence pour obtenir $|u_{n+1} - \beta| \leqslant \dfrac{1}{4}|u_n - \beta| \leqslant \dfrac{1}{4} \times \dfrac{2}{4^n} = \dfrac{2}{4^{n+1}}$, ce qui achève la récurrence.

   (c) Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{4^n}$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - \beta| = 0$, c'est-à-dire que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \beta$.