Devoir surveillé n°7

PTSI B Lycée Eiffel

30 mars 2013

Durée : 4H. Calculatrices interdites.

Exercice 1

Dans tout cet exercice, on s'intéresse au sous-ensemble E de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ constitué des matrices vérifiant $a_{11}+a_{12}+a_{13}=a_{21}+a_{22}+a_{23}=a_{31}+a_{32}+a_{33}=a_{11}+a_{21}+a_{31}=a_{12}+a_{22}+a_{32}=a_{13}+a_{23}+a_{33}$. Pour une matrice $A\in E$, on notera $s(A)=a_{11}+a_{12}+a_{13}$.

On note également I la matrice identité d'ordre 3, et $J=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$.

1. Montrer que I et J appartiennent à E, et déterminer les valeurs de $s(I)$ et $s(J)$.
2. Montrer que E est un sous-groupe de $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+)$.
3. Soit K la matrice définie par $K=\begin{pmatrix}x&x&y\\-x&z&x\\z&-1&x\end{pmatrix}$, où x, y et z sont trois réels. Déterminer les valeurs possibles de x, y et z pour que K appartienne à E.
4. Soient A et B deux matrices de E, montrer que $AB\in E$ et que $s(AB)=s(A)s(B)$.
5. (a) Calculer AJ et JA pour une matrice A quelconque de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   (b) Montrer que A appartient à E si et seulement si $AJ=JA$.
   (c) Vérifier que, si $A\in E$, $AJ=s(A)J$.
6. Soit A une matrice inversible de E. En utilisant les résultats de la question précédente, montrer que $A^{-1}\in E$, que $s(A)\neq 0$, et exprimer $s(A^{-1})$ en fonction de $s(A)$.
7. Soit $A\in E$, on note $B=\dfrac{1}{3}s(A)J$ et $C=A-B$. On note également $F=\{M\in E\mid s(M)=0\}$.
   (a) Montrer que B appartient à E.
   (b) Calculer BC et CB.
   (c) En déduire que, $\forall n\geqslant 1$, $(A-B)^n=A^n-B^n$.
   (d) Montrer que toute matrice de E peut s'écrire sous la forme $M+\lambda J$, où $M\in F$.

Exercice 2

Dans cet exercice, on souhaite déterminer toutes les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et dérivables en 0 (aucune hypothèse de continuité ou de dérivabilité n'est faite ailleurs qu'en 0) vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(2x) = \dfrac{2f(x)}{1+f(x)^2}$.

1. Déterminer les fonctions constantes solutions du problème.
2. Montrer que la fonction th est solution du problème.
3. Pour une fonction solution, déterminer les valeurs possibles de $f(0)$.
4. Montrer que, si f est une fonctions solution, elle est bornée par -1 et 1.
5. On suppose dans cette question qu'il existe un réel a pour lequel $0 < |f(a)| < 1$.
   (a) Montrer qu'il existe un réel b tel que $f(a) = \mathrm{th}(b)$.
   (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{th}\left(\dfrac{b}{2^n}\right) = f\left(\dfrac{a}{2^n}\right)$.
   (c) Montrer que $\dfrac{f(\frac{a}{2^n})}{\frac{a}{2^n}}$ a une limite finie quand n tend vers $+\infty$. En déduire les valeurs de $f(0)$ et de $f'(0)$ (en fonction de a et b).
   (d) Conclure que, si $f'(0) \neq 0$, la fonction f est la fonction $x \mapsto \tanh(bx)$.
6. On suppose dans cette question qu'il existe un réel a pour lequel $f(a) = 1$.
   (a) Que peut-on alors dire de la suite $\left(f\left(\dfrac{a}{2^n}\right)\right)$?
   (b) En déduire $f(0)$, puis montrer que $f'(0) = 0$ et en déduire la fonction f.
7. Traiter le cas où $f(a) = 0$ de façon similaire à la question précédente.

Problème

On donne pour ce problème les valeurs numériques suivantes : $\dfrac{1}{\sqrt{e}} \simeq 0,6$; $\dfrac{3}{2e} \simeq 0,55$; $\ln(2) \simeq 0,7$ et $\ln(2)^2 \simeq 0,5$.

I. Une première étude de fonction

On définit la fonction i sur $]0;+\infty[$ par $i(x) = x^2 + x - 2 - x^2\ln(x)$.

1. Calculer la dérivée i' de la fonction i ainsi que sa dérivée seconde i''.
2. Montrer que la fonction i est prolongeable par continuité en 0. La fonction ainsi prolongée est-elle dérivable en 0 ?
3. Étudier la convexité de la fonction i. Donner l'équation de la tangente à la courbe représentative de i en son unique point d'inflexion.
4. Montrer que i' s'annule en une unique valeur α. Montrer que $\alpha > 1$.
5. En déduire le tableau de variations de i, et montrer que i s'annule deux fois sur $]0;+\infty[$: en 1 et en une valeur β qu'on ne cherchera pas à déterminer.
6. Étudier la branche infinie de i en $+\infty$.
7. Tracer une allure soignée de la courbe de i en exploitant tous les calculs effectués dans cette première partie (on donne $\alpha \simeq 2$ et $\beta \simeq 3$).

II. Une deuxième étude de fonction

On définit désormais une fonction f par $f(x) = \dfrac{(x+2)(x-1)}{x\ln(x)}$

1. Déterminer le domaine de définition de f. Montrer qu'on peut la prolonger par continuité en posant $f(1) = 3$.
2. Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.
3. Calculer $f'(x)$ et montrer que son signe est le même que celui de $g(x) = \ln(x) - \dfrac{x^2+x-2}{x^2+2}$.
4. En admettant que $\ln(x) \underset{x\to 1}{=} x - 1 - \dfrac{1}{2}(x-1)^2 + o((x-1)^2)$, montrer que f est dérivable en 1 et que $f'(1) = -\dfrac{1}{2}$.
5. Calculer $g'(x)$ et montrer que son signe est le même que celui de $h(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 - 2x + 4$.
6. En constatant que $h(1) = h(-2) = 0$, factoriser h et en déduire le tableau de variations de g.
7. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une seule solution autre que 1, que l'on notera λ (mais qu'on ne sait pas calculer). En déduire le tableau de variations de f (on donne $f(\lambda) \simeq 2,9$).

III. Une suite récurrente

On définit désormais une suite récurrente (u_n) en posant $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer que $f([2;4]) \subset [2;4]$. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $2 \leqslant u_n \leqslant 4$.
2. En exploitant les résultats de la première partie, donner le signe de $f(x) - x$ et en déduire que β est l'unique point fixe de la fonction f.
3. En **admettant** que la fonction f' est croissante sur $[2;4]$, montrer que $\forall x \in [2;4]$, $|f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{4}$.
4. Montrer successivement les propriétés suivantes :
   (a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \beta| \leqslant \dfrac{1}{4}|u_n - \beta|$
   (b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \beta| \leqslant \dfrac{2}{4^n}$
   (c) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \beta$.