Devoir surveillé n°6 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

15 février 2013

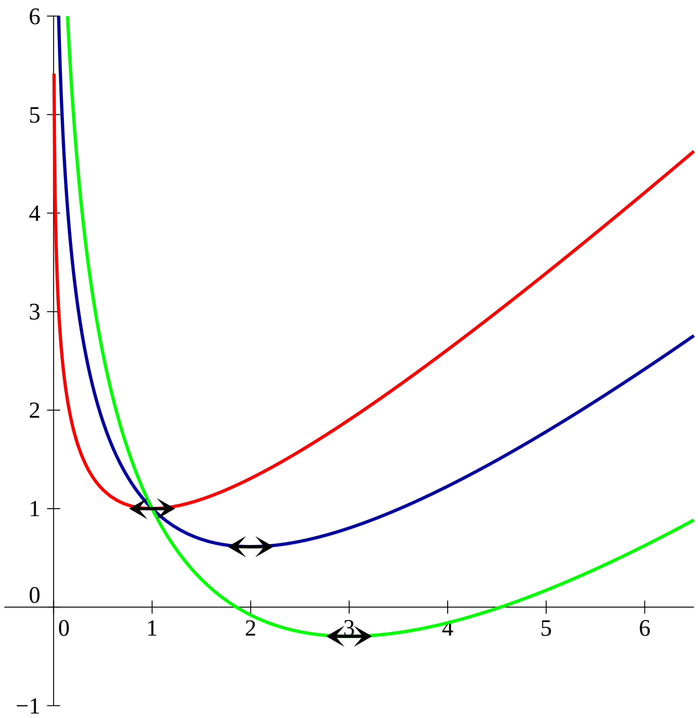
Exercice 1

1. (a) La fonction f_n est définie sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée $f_n'(x) = 1 - \dfrac{n}{x}$. Cette dérivée s'annule pour $x = n$, par ailleurs $\lim\limits_{x \to 0} f_n(x) = +\infty$ (n est supposé strictement positif) et par croissance comparée, $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$. Enfin, $f_n(n) = n - n\ln(n) = n(1 - \ln(n))$. D'où le tableau de variations suivant :

x	0		n		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	$n(1-\ln(n))$	$\nearrow$	$+\infty$

(b) Calculons donc $f_{n+1}(x) - f_n(x) = x - (n+1)\ln(x) - x + n\ln(x) = -\ln(x)$. Cette expression est positive si $x \in]0;1]$, négative sur $[1;+\infty[$. Les courbes sont donc « de plus en plus haut » sur $]0;1]$, et « de plus en plus bas » sur $[1;+\infty[$. Elles ont toutes un point commun : $f_n(1) = 1$ quelle que soit la valeur de n.

(c) Voici les allures demandées (f_1 en rouge, f_2 en bleu, f_3 en vert), avec minimum indiqué.



(d) Lorsque $n \geqslant 3$, on a $\ln(n) > 1$ puisque $3 > e$, donc $n(1 - \ln(n)) < 0$. Or, au vu du tableau de variations de la fonction f_n, celle-ci est bijective de $]0;n[$ vers $]n(1-\ln(n));+\infty[$, et de $]n;+\infty[$ vers $]n(1-\ln(n));+\infty[$. Si $n \geqslant 3$, 0 a donc exactement deux antécédents, l'un (celui qu'on notera u_n) sur l'intervalle $]0;n[$, et l'autre sur $]n;+\infty[$ (qui correspond à v_n).

2. (a) On a déja remarqué plus haut que $f_n(1) = 1 > 0$. De plus, $f_n(e) = e - n\ln(e) = e - n < 0$ avec $n \geqslant 3$. Puisque $f_n(1) > f_n(u_n) > f_n(e)$, et la fonction f_n étant strictement décroissante sur l'intervalle $]0;n[$ auquel appartiennent ces trois valeurs, on a bien $1 < u_n < e$.

   (b) Calculons donc $f_n(u_{n+1}) = u_{n+1} - n\ln(u_{n+1})$. Or, par définition, on sait que $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0$, c'est-à-dire que $u_{n+1} - (n+1)\ln(u_{n+1}) = 0$ ou encore $u_{n+1} = (n+1)\ln(u_{n+1})$. En remplaçant dans le calcul précédant, on a donc $f_n(u_{n+1}) = (n+1)\ln(u_{n+1}) - n\ln(u_{n+1}) = \ln(u_{n+1})$. Comme on vient de voir que tous les termes de la suite étaient strictement supérieurs à 1, $\ln(u_{n+1}) > 0$, donc $f_n(u_{n+1}) > f_n(u_n)$. La fonction f_n étant toujours décroissante sur l'intervalle considéré, $u_{n+1} < u_n$ et la suite (u_n) est donc décroissante. Comme elle est par ailleurs minorée par 1, elle converge certainement.

   (c) Au vu de l'encadrement $1 < u_n < e$, et en utilisant le fait que $u_n = n\ln(u_n)$, on a $1 < n\ln(u_n) < e$, soit $\frac{1}{n} < \ln(u_n) < \frac{e}{n}$. Les deux termes extrêmes de cet encadrement ont manifestement pour limite 0, une application du théorème des gendarmes nous permet d'affirmer que $\lim_{n\to+\infty} \ln(u_n) = 0$, donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$.

   (d) Puisque u_n tend vers 1, $u_n - 1$ tend vers 0, donc $\ln(u_n) = \ln(1+(u_n-1)) \sim u_n - 1$, ce qui correspond exactement à dire que $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(u_n)}{u_n - 1} = 1$. On a donc $u_n - 1 \sim \ln(u_n) \sim \frac{u_n}{n} \sim \frac{1}{n}$.

3. (a) Puisque $n < v_n$, le théorème de comparaison nous donne immédiatement $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

   (b) Calculons donc : $f_n(n\ln(n)) = n\ln(n) - n\ln(n\ln(n)) = n\ln(n) - n\ln(n) - n\ln(\ln(n)) = -n\ln(\ln(n))$. Comme $n \geqslant 3$, $\ln(n) > 1$, et $\ln(\ln(n)) > 0$, donc $f_n(n\ln(n)) < 0$. Comme, par définition, $f_n(v_n) = 0$, et que sur $]n;+\infty[$, intervalle auquel appartiennent ces deux valeurs, f_n est croissante, on en déduit que $n\ln(n) < v_n$.

   (c) On peut reprendre intelligemment les calculs de la toute première question : la fonction f_2 est strictement positive sur $\mathbb{R}^{+*}$, donc on a $\forall x > 0$, $x > 2\ln(x)$. L'inégalité demandée en découle.

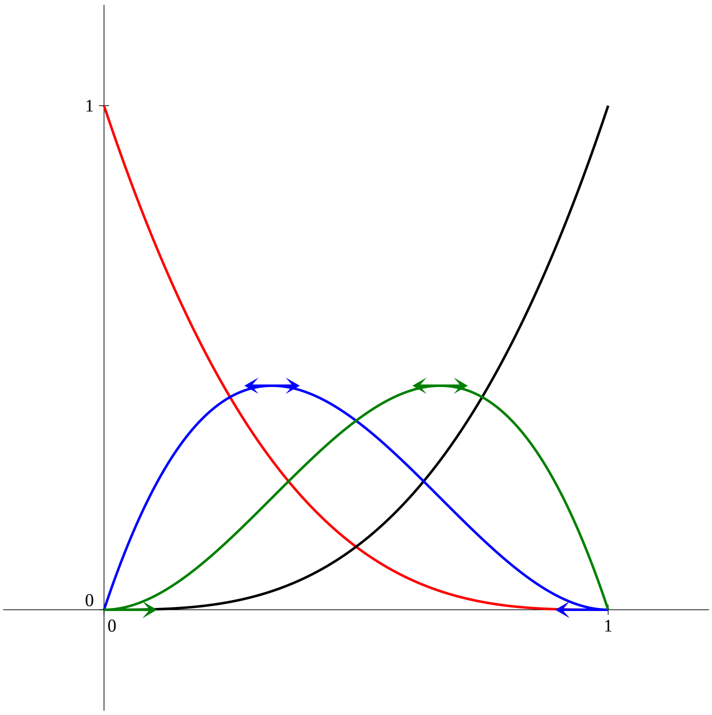
   (d) Calculons à nouveau : $f_n(2n\ln(n)) = 2n\ln(n) - n\ln(2n\ln(n)) = 2n\ln(n) - n\ln(n) - n\ln(2\ln(n)) = n(\ln(n) - \ln(2\ln(n))$. Or, comme $n > 2\ln(n)$, $\ln(n) > \ln(2\ln(n))$, donc $f_n(2n\ln(n)) > 0$. On en déduit comme tout à l'heure que $v_n < 2n\ln(n)$.

   (e) Au vu de ce qui précède, $\ln(n) + \ln(\ln(n)) \leqslant \ln(v_n) \leqslant \ln(2) + \ln(n) + \ln(\ln(n))$, donc $1 + \frac{\ln(\ln(n))}{\ln(n)} \leqslant \frac{v_n}{\ln(n)} \leqslant 1 + \frac{\ln(2)}{\ln(n)} + \frac{\ln(\ln(n))}{\ln(n)}$. Or, on sait que $\lim_{n\to+\infty} \ln(n) = +\infty$, et $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ (croissance comparée), donc par composition de limites, $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(\ln(n))}{\ln(n)} = 0$. Les deux membres extrêmes de l'encadrement précédent ont donc pour limite 1, et on peut appliquer le théorème des gendarmes pour obtenir $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(v_n)}{\ln(n)} = 1$, soit $\ln(v_n) \sim \ln(n)$. On ne peut bien évidemment pas en déduire d'équivalent simple de v_n.

Exercice 2

1. Il suffit de recopier la définition : $B_{3,0} = \binom{3}{0} X^0(1-X)^{3-0} = (1-X)^3 = 1 - 3X + 3X^2 - X^3$; $B_{3,1} = \binom{3}{1} X^1(1-X)^2 = 3X(1-X)^2 = 3X - 6X^2 + 3X^3$; $B_{3,2} = 3X^2(1-X) = 3X^2 - 3X^3$ et $B_{3,3} = X^3$.

2. Le polynôme $B_{3,0}$ est décroissant sur $[0;1]$ (et même sur $\mathbb{R}$!), sa dérivée s'annulant accessoirement en 1, et il vaut 1 en 0 et 0 en 1. Au contraire, le polynôme $B_{3,3}$ est croissant, de dérivée nulle en 0, s'annule en 0 et vaut 1 en 1. Ensuite, $B'_{3,1} = 3 - 12X + 9X^2 = 3(1 - 4X + 3X^2)$. La parenthèse a pour racine évidente 1, et s'annule également en $\frac{1}{3}$ pusique le produit des racines doit être égal à $\frac{1}{3}$. La fonction $B_{3,1}$ est croissante sur $\left[0;\frac{1}{3}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{2}{3};1\right]$, avec pour maximum $3 \times \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$. Inutile de refaire les calculs pour le dernier polynôme : $B_{3,2}(x) = B_{3,1}(1-x)$, donc sa dérivée s'annule en 0 et en $\frac{2}{3}$, avec un maximum $\frac{4}{9}$ également. Ce qui donne les courbes suivantes ($B_{3,0}$ en rouge, $B_{3,1}$ en bleu, $B_{3,2}$ en vert et $B_{3,3}$ en noir) :



3. Calculons $B_{3,0}+B_{3,1}+B_{3,2}+B_{3,3} = 1-3X+3X^2-X^3+3X-6X^2+3X^3+3X^3-3X^3+X^3 = 1$. En fait, cette façon de faire le calcul est débile, on a en général $\sum_{k=0}^{n} B_{n,k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k(1-X)^{n-k} = (X+1-X)^n = 1$ en utilisant la formule du binôme de Newton (qui est certainement valable sur l'anneau commutatif $\mathbb{K}[X]$). Comme tous les polynômes $B_{n;k}$ prennent des valeurs positives sur $[0,1]$ (puisque x et $1-x$ sont positifs sur cet intervalle), on aura toujours $0 \leqslant B_{n,k} \leqslant 1$ sur $[0,1]$.
4. Calculons de façon formelle : $B'_{n,k} = k\binom{n}{k}X^{k-1}(1-X)^{n-k} + (n-k)\binom{n}{k}X^k(1-X)^{n-k-1}$. Dans la première moitié, on peut utiliser la formule $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$ pour obtenir $n\binom{n-1}{k-1}X^{k-1}$ $(1-X)^{n-1-(k-1)} = nB_{n-1,k-1}$. Dans la deuxième moitié, on constate que $(n-k)\binom{n}{k} = \frac{(n-k)n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-1-k)!} = n\binom{n-1}{k}$ et on fait pareil pour trouver $n\binom{n-1}{k}X^k(1-X)^{n-1-k} = nB_{n-1,k}$. Finalement, $B'_{n,k} = n(B_{n-1,k-1} - B_{n-1,k})$.
5. L'application φ est bien une application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans lui-même puisque tous les polynômes $B_{n,k}$ sont de degré n, donc la somme définissant φ est au pire de degré n. De plus, $\varphi(P +$

$Q) = \sum_{k=0}^{n}(P+Q)\left(\frac{k}{n}\right)B_{n,k} = \sum_{k=0}^{n} P\left(\frac{k}{n}\right)B_{n,k} + \sum_{k=0}^{n} Q\left(\frac{k}{n}\right)B_{n,k}$. Il s'agit donc bien d'un endomorphisme de groupes.

6. Le noyau est constitué des polynômes P pour lesquels $\sum_{k=0}^{n} P\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}X^k(1-X)^{n-k} = 0$. Notons pour simplifier $a_k = P\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}$, on a alors $\sum_{k=0}^{n} a_k X^k(1-X)^{n-k}$, et notons p le plus petit indice pour lequel $a_p \neq 0$. On peut factoriser par X^p pour obtenir $X^p(a_p(1-X)^{n-p} + a_{p+1}X(1-X)^{n-p-1}+\dots)$. L'anneau $\mathbb{K}[X]$ étant intègre, on doit avoir $a_p(1-X)^{n-p}+a_{p+1}X(1-X)^{n-p-1} + \dots + a_n X^{n-p} = 0$. En remplaçant X par 0, on trouve alors $a_p = 0$ (tous les autres termes s'annulent), ce qui contredit la définition de a_p. La seule possibilité est alors que tous les coefficients a_p soient nuls, ce qui impose que $P\left(\frac{k}{n}\right) = 0$ pour tout entier k. Autrement dit, le polynôme P possède (au moins) $n+1$ racines distinctes, ce qui est délicat pour un polynôme de degré inférieur ou égal à n. Le seul élément du noyau est donc le polynôme nul, et l'application φ est injective.

7. On a donc $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}x^k(1-x)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}x^{k+1}(1-x)^{n-1-k} = x\sum k = 0^{n-1}\binom{n-1}{k}x^k(1-x)^{n-1-k} = x(x+1-x)^{n-1} = x$. Cette expression a certainement pour limite x quand n tend vers $+\infty$!

8. Pour calculer la somme, il est pratique d'écrire le $\frac{k^2}{n^2}$ sous la forme $\frac{k(k-1)}{n^2} + \frac{k}{n^2}$, ce qui donne $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{k(k-1)}{n^2}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n^2}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = \sum_{k=2}^{n}\frac{n(n-1)}{n^2}\binom{n-2}{k-2}x^k(1-x)^{n-k} + \frac{x}{n}$ en reprenant le calcul de la question précédente pour la deuxième moitié. On continue le calcul : $f_n(x) = \frac{n-1}{n}\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}x^{k+2}(1-x)^{n-2-k} + \frac{x}{n} = \frac{n-1}{n}x^2(x+1-x)^{n-2} + \frac{x}{n} = \frac{n-1}{n}x^2 + \frac{x}{n}$. cette expression converge bien vers x^2. On peut en fait démontrer (mais c'est nettement plus compliqué !) que, pour toute fonction f continue sur $[0;1]$, $f_n(x)$ converge vers $f(x)$.

Exercice 3

1. Calculoon donc : $u_1 = 1$; $u_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$; $u_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$ et $u_4 = \frac{11}{6} + \frac{1}{4} = \frac{25}{12}$.

2. Une belle façon de faire est de passer par l'intégration : $\forall x \in [n, n+1]$, $\frac{1}{n+1} \leqslant \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{n}$. En intégrant entre n et $n+1$ on trouve $\int_n^{n+1}\frac{1}{n+1}\,dx \leqslant \int_n^{n+1}\frac{1}{x}\,dx \leqslant \int_n^{n+1}\frac{1}{n}\,dx$, soit $\frac{1}{n+1} \leqslant \ln(n+1) - \ln(n) \leqslant \frac{1}{n}$. Il suffit de remplacer n par $n-1$ dans l'inégalité de gauche pour obtenir celle de droite de l'encadrement demandé (c'est pour ça qu'elle n'est valable que si $n \geqslant 2$).

3. Additionnons les encadrements précédents : $\sum_{k=2}^{n}\ln(k+1)-\ln(k) \leqslant \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} \leqslant \sum_{k=2}^{n}\ln(k)-\ln(k-1)$, ce qui donne par télescopage $\ln(n+1)-\ln(2) \leqslant u_n - 1 \leqslant \ln(n)$, donc $\ln(n+1)-\ln(2)+1 \leqslant u_n \leqslant \ln(n)+1$. Comme $\ln(2) < 1$, on a a fortiori $\ln(n+1) \leqslant u_n$.

4. Puisque $u_n \geqslant \ln(n+1)$, la suite diverge vers $+\infty$. Par ailleurs, $\dfrac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \leqslant \dfrac{u_n}{\ln(n)} \leqslant \dfrac{\ln(n)+1}{\ln(n)}$, soit $1 + \dfrac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln(n)} \leqslant \dfrac{u_n}{\ln(n)} \leqslant 1 + \dfrac{1}{\ln(n)}$. Les deux membres extrêmes de l'encadrement tendent vers 1, le théorème des gendarmes permet donc d'affirmer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{\ln(n)} = 1$, soit $u_n \sim \ln(n)$.

5. D'une part $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{n+1}$, donc $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) \leqslant 0$ d'après la question 2, donc la suite (v_n) est décroissante. D'autre part, en reprenant l'encadrement de la question 3, $v_n \geqslant \ln(n+1) - \ln(n) \geqslant 0$, donc la suite (v_n) est minorée. D'après le théorème de convergence monotone, elle converge. On peut donc écrire $v_n = \gamma + o(1)$, soit $u_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$.

6. (a) Trois choses à vérifier, comme d'habitude, d'abord $S_{2n+1} - S_{2n} = \dfrac{(-1)^{2n+2}}{2n+1} = \dfrac{1}{2n+1}$, qui tend certainement vers 0. De plus, $S_{2(n+1)} - S_{2n} = S_{2n+2} - S_{2n} = \dfrac{(-1)^{2n+3}}{2n+2} + \dfrac{(-1)^{2n+2}}{2n+1} = \dfrac{1}{2n+1} - \dfrac{1}{2n+2} > 0$, donc la suite (S_{2n}) est croissante. de même, $S_{2n+3} - S_{2n+1} = \dfrac{1}{2n+3} - \dfrac{1}{2n+2} < 0$, donc (S_{2n+1}) est décroissante. Les deux suites sont donc adjacentes.

   (b) On peut écrire $S_{2n} = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} - 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = u_{2n} - u_n$.

   (c) Utilisons donc : $S_{2n} = u_{2n} - u_n = \ln(2n) + \gamma + o(1) - \ln(n) - \gamma - o(1) = \ln(2n) - \ln(n) + o(1) = \ln(2) + o(1)$, ce qui signifie exactement que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{2n} = \ln(2)$. Comme (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes, (S_{2n+1}) a également pour limite $\ln(2)$, et d'après un résultat du cours, on peut alors conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \ln(2)$.

   (d) Au vu de l'adjacence des deux sous-suites, on a toujours $S_n \leqslant l \leqslant S_{n+1}$ (ou le contraire, selon la parité de n), donc $|S_n - l| \leqslant |S_{n+1} - S_n|$. Or, $S_{n+1} - S_n = \pm\dfrac{1}{n+1}$, ce dont l'inégalité demandée découle.